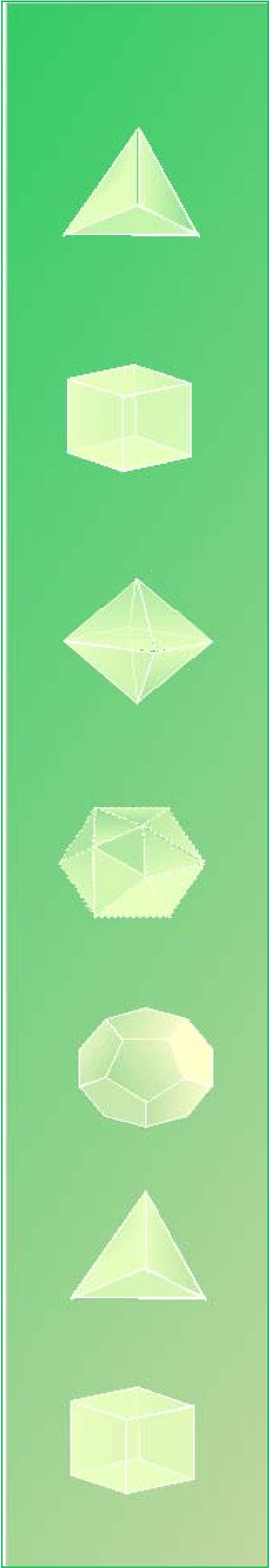


APLICACIONES INFORMÁTICAS: Geogebra y hoja de cálculo

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: María Molero***

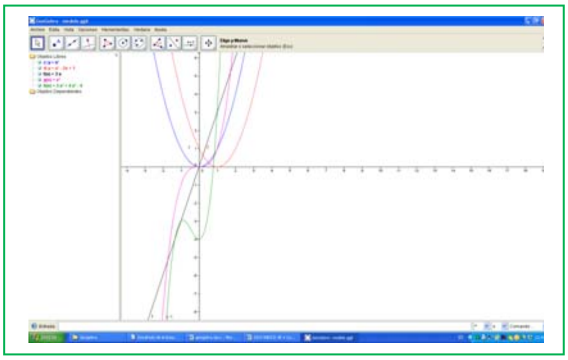
Revisor: ***

Ilustraciones de la autora

Índice

1. PRIMEROS PASOS CON GEOGEBRA

1.1. LA VENTANA DE GEOGEBRA
1.2. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS
1.3. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES
1.4. ÁNGULOS



2. GEOGEBRA PARA 1º Y 2º DE ESO

2.1. POLÍGONOS
2.2. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO-
2.3. SEMEJANZA
2.4. PUNTOS Y RECTAS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

3. GEOGEBRA PARA 3º Y 4º DE ESO

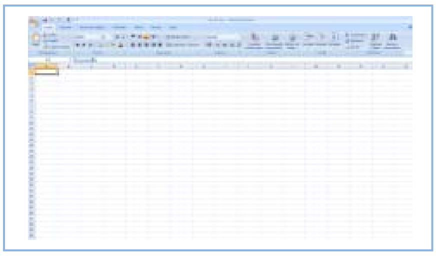
3.1. MOVIMIENTOS EN EL PLANO
3.2. GRÁFICAS DE FUNCIONES CON *GEOGEBRA*
3.3. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
3.4. LA PROPORCIÓN ÁUREA
3.5. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA COMPRENDER LA SEMEJANZA

4. GEOGEBRA PARA BACHILLERATO

4.1. LAS CÓNICAS
4.2. OTROS LUGARES GEOMÉTRICOS. CICLOIDES, EPICICLOIDES E HIPOCICLOIDES
4.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

5. PRIMEROS PASOS CON LA HOJA DE CÁLCULO

5.1. LA VENTANA DE UNA HOJA DE CÁLCULO
5.2. OPERACIONES GENERALES
5.3. CÁLCULO DE LA LETRA DEL NIF



6. HOJA DE CÁLCULO PARA 1º Y 2º DE ESO

6.1. NÚMERO PERFECTO
6.2. NÚMEROS AMIGOS
6.3. CONSTRUCCIÓN DE NÚMEROS PERFECTOS. NÚMEROS PRIMOS
6.4. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA EN 1º DE ESO
6.5. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA EN 2º ESO

7. HOJA DE CÁLCULO PARA 3º Y 4º DE ESO

7.1. ALGORITMO DE EUCLIDES
7.2. LOS NÚMEROS IRRACIONALES. LÍMITE DE SUCESIONES
7.3. INTERÉS COMPUESTO
7.4. SISTEMAS LINEALES
7.5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS
7.6. ESTADÍSTICA. PARÁMETROS

8. HOJA DE CÁLCULO PARA BACHILLERATO

8.1. EL NÚMERO e COMO LÍMITE DE UNA SUCESIÓN
8.2. LOS NÚMEROS IRRACIONALES. MÉTODO DE MONTECARLO
8.3. LA CATENARIA

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

8.4. CÁLCULO DEL VALOR APROXIMADO DE $\frac{senx}{x}$.

8.5. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

8.6. CÁLCULO DE SOLUCIONES APROXIMADAS

Resumen

El alumnado de hoy en día no se corresponde ya con los de decenios anteriores. Ahora mismo nuestros estudiantes serán lo que se podría llamar *nativos digitales* (individuos que han crecido inmersos en la tecnología digital), y que tendrán por maestros a los llamados *inmigrantes digitales* (personas que nos hemos adaptado a la tecnología, pero con ciertas dificultades).

El sistema educativo prevé la necesidad de cambios profundos en el aula, y las posibilidades didácticas de la integración de las herramientas informáticas en las clases, como un recurso cotidiano en el aula de matemáticas.

Ir al aula de informática o de audiovisuales resulta, en la mayoría de los casos, muy complicado y estresante para el profesorado, ya que allí pueden darse múltiples incidencias: hay que buscar cuándo está libre, programar la actividad con mucho tiempo, sin modificación temporal, dedicar toda la clase a trabajar con ese medio, y sin poder continuar al día siguiente si no estaba previsto, …, además de los problemas "técnicos" que pueden surgir en un aula de informática (no funciona Internet, el ordenador o el vídeo, programas que dejan de funcionar, cables que se aflojan, programas que no funcionan …), y sin que haya un experto informático que pueda arreglar en un tiempo razonable esas incidencias.

Una propuesta de Marea Verde de Matemáticas es la de tener un **aula-taller de matemáticas** (del mismo modo que tenemos aulas de tecnología, de música, laboratorios, gimnasio,…). También se podría llamar **Laboratorio de Matemáticas.** En éste aula debería estar instalada una Pizarra Digital interactiva con ordenador, proyector y conexión a Internet (además de materiales manipulables y fotocopiables, libros, etc.). En éste aula también debería haber algunos ordenadores portátiles, que podrían ser del centro o del alumnado.

Hemos propuesto actividades para secundaria (ESO y Bachillerato) en *Geogebra* y en *hoja de cálculo*. Este software tiene la ventaja de ser gratuito y poder instalarse en cualquier ordenador de casa (no ocupan mucho espacio), pues para los estudiantes serán "asistentes" de uso habitual para resolver problemas matemáticos.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

1. PRIMEROS PASOS CON GEOGEBRA

Esta actividad está orientada al aprendizaje de las reglas básicas para manejar el programa *Geogebra*. Se describen los elementos básicos del programa que se utilizan para realizar construcciones sencillas y estudiar relaciones entre ángulos.

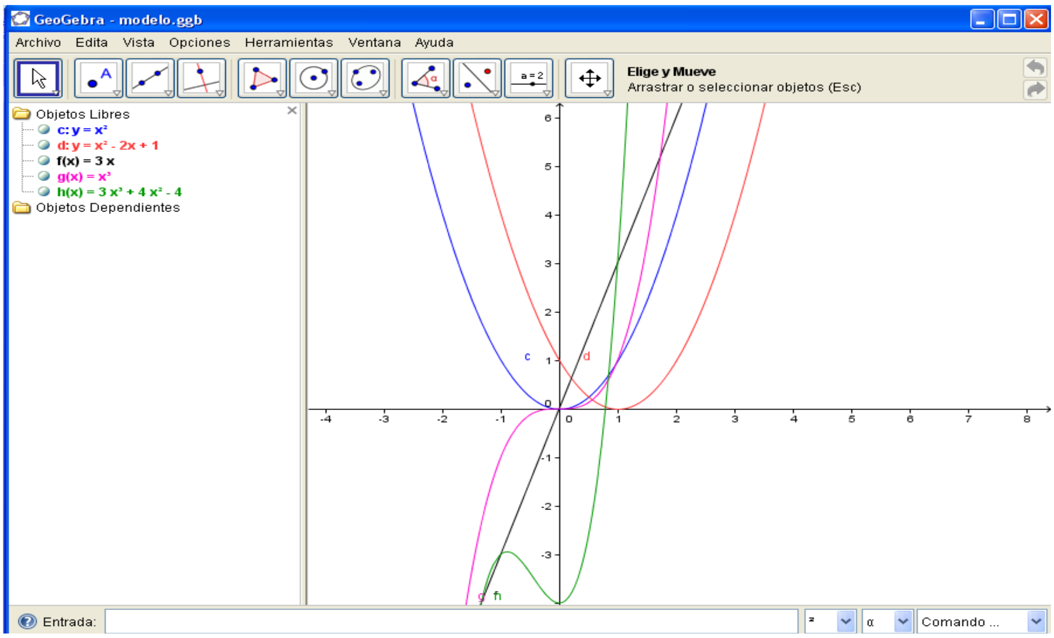
1.1. La ventana de *Geogebra*

Al ejecutar el programa *Geogebra* la ventana que aparece tiene muchos componentes comunes con cualquier ventana de Windows.

El elemento más característico de este programa es la **barra de herramientas** en la que aparecen iconos. Cada uno de ellos se activa al hacer clic con el ratón sobre él y se desactiva cuando se selecciona otro. Estos primeros iconos que aparecen se corresponden con la primera opción que encontramos en el menú desplegable que se obtiene al mantener pulsado el ratón sobre cada uno de ellos.

Otra particularidad es que el área de trabajo está dividida en dos partes la **ventana geométrica**, donde se realizan las construcciones geométricas, y la **ventana algebraica** en la que aparecen características de los elementos que se construyen en la ventana geométrica como son las coordenadas de los puntos, las longitudes de los segmentos, el área de los polígonos, las ecuaciones de rectas, circunferencias, ….

También se pueden realizar operaciones introduciendo los números o el nombre de los elementos en el **Campo de Entrada** que se encuentra en la parte inferior de la ventana, los resultados aparecen en la ventana algebraica. Con las opciones de **Visualiza** de la barra de menús se puede ocultar o mostrar, la



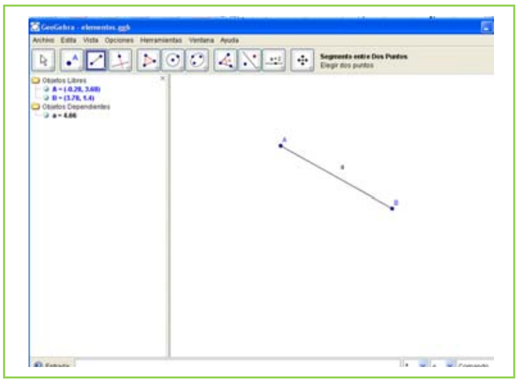
ventana algebraica, el campo de entrada así como los ejes y la cuadrícula de la ventana geométrica.

Los iconos **Deshace** y **Rehace** que se encuentran en la parte superior derecha de la ventana geométrica y como opciones del menú **Edita** permiten eliminar o volver a mostrar una acción realizada.

El **menú contextual**, el que se obtiene al hacer clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto de la ventana geométrica o de la algebraica, tiene múltiples posibilidades, permite entre otras funciones borrar, ocultar, cambiar el nombre y modificar la apariencia de los objetos construidos.

1.2. Elementos geométricos

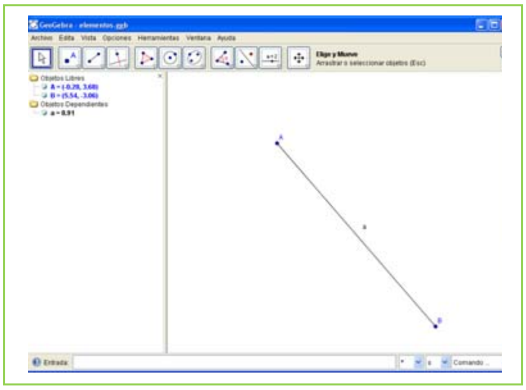
Actividades resueltas



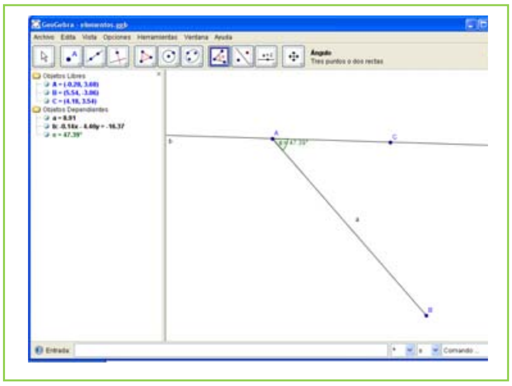
Antes de comenzar comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la ventana algebraica y desactiva ejes y cuadrícula.

- Con la herramienta **Nuevo punto** dibuja un punto en la ventana geométrica, el sistema lo denomina *A* y sus coordenadas aparecen en la ventana algebraica, en la carpeta de los objetos libres.

- Dibuja otro punto *B* y con la herramienta **Segmento entre dos puntos** traza el segmento, *a*, que pasa por los puntos *A* y *B*. En la ventana algebraica aparece la longitud del segmento en la carpeta de objetos dependientes.



- Con la herramienta **Desplaza**, la primera de la barra de herramientas, agarra el punto *B* y cambia su posición, observa de qué forma cambian sus coordenadas y la longitud del segmento.

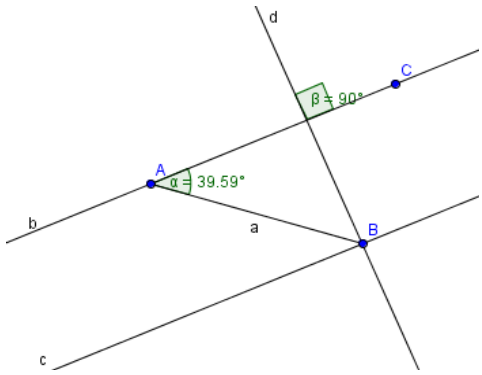


- Dibuja otro punto *C,* que no pertenezca al segmento, y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** traza la recta, *b*, que pasa por *A* y *C*.

- Activa la herramienta **Ángulo** y señala con el ratón los puntos *B*, *A* y *C*, obtienes la medida del ángulo que has señalado. El orden para señalar los puntos *B* y *C* debe ser el contrario al de las agujas del reloj.

1.3. Rectas paralelas y perpendiculares

Actividades resueltas



Con la herramienta **Recta paralela** traza una recta, *c*, que pasa por el punto *B* y es paralela a la recta *b* que pasa por los puntos *A* y *C*.

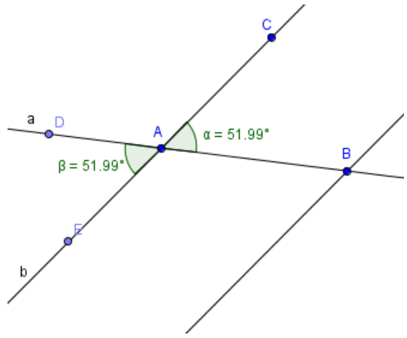
- Utiliza la herramienta **Recta perpendicular** para trazar una recta, *d*, que pasa por el punto *B* y es perpendicular a la recta *b*.

- Calcula la medida del **ángulo** que forman las rectas *b* y *d*.

- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos *A, B* y *C* y observa que cambian de posición pero se mantienen las propiedades geométricas de la construcción, por ejemplo, las rectas *b* y *c* permanecen paralelas entre sí y perpendiculares a la recta *d*.

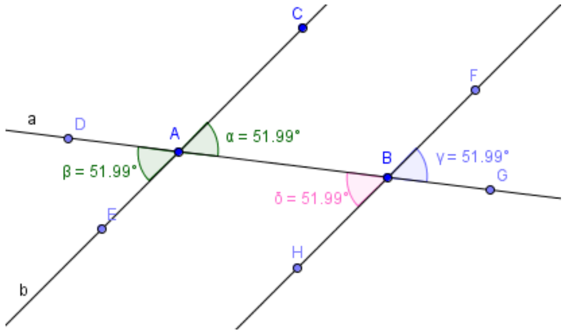
1.4. Ángulos

Actividades resueltas



Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Determina tres **puntos** *A*, *B* y *C*, no alineados, la **recta**, *a*, que pasa por *A* y *B* y la recta, *b*, que pasa por los puntos *A* y *C*.
- Traza la **recta paralela**, *c*, que pasa por *B* y es paralela a la recta *a*.
- Calcula la medida del **ángulo,** α, que determinan los puntos *B, A* y *C,* señalando los puntos *B* y *C* en orden contrario al sentido de las agujas del reloj.
- Elige un punto *D* de la recta *a* y otro *E* de la recta *b* para determinar y medir un ángulo, β, *opuesto por el vértice* al ángulo α.



- Determina y mide un ángulo γ tal que los ángulos α y γ sean *correspondientes entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Determina y mide un ángulo δ tal que los ángulos α y δ sean *alternos internos entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos *A, B* y *C* y observa que cambian de posición pero los ángulos α, β, γ y δ miden lo mismo.
- Indica dos ángulos de los que has dibujados que sean *alternos externos entre paralelas*.

Actividades propuestas

1. Repite la actividad resuelta de elementos geométricos. Colócate encima del segmento *a*, aprieta el botón derecho, entra en **Propiedades** y modifica el color, haz que sea rojo. Lo mismo con la recta *b*, pero ahora coloréala en azul. Mueve el punto *B* para observar cómo se modifican las longitudes y el ángulo.

2. Dibuja los rectas paralelas cortadas por una secante y mide todos los ángulos que se formen.

3. Dibuja dos ángulos con lados paralelos y comprueba que miden lo mismo.

4. .Dibuja dos ángulos con lados perpendiculares y comprueba que miden lo mismo.

5. Dibuja dos ángulos que sean complementarios y dos que sean suplementarios.

En el Proyecto Gauss:

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

puedes encontrar muchas actividades para GeoGebra.

Otras de autores de Marea Verde en:

http://www.vccsse.ssai.valahia.ro/dvd/ES/matrix32.html

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

2. GEOGEBRA PARA 1º Y 2º DE ESO

2.1. Polígonos

En esta actividad se construyen cuadriláteros y triángulos, fijado el valor de su área, con el programa *Geogebra.* Para realizar estas construcciones es necesario conocer las clasificaciones de estos polígonos y las fórmulas para calcular sus áreas.

Paralelogramos

Actividades resueltas

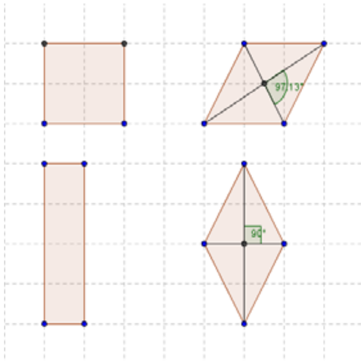
- *Construye un cuadrado de área* 4 u^2.

Antes de comenzar comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la **ventana algebraica** y la **cuadrícula** y desactiva los **ejes**. Para que en la ventana geométrica no aparezcan los nombres de los elementos que vas a dibujar, en **Rotulado** del menú **Opciones** activa **Obviando nuevos puntos**.

Se trata de construir paralelogramos de área dada, por ejemplo 4 u^2. Empieza dibujando un cuadrado de lado 2 u.

- Con la herramienta **Nuevo punto** determina dos puntos en la ventana geométrica en puntos de la cuadrícula que sean vértices consecutivos del cuadrado de lado 2 u.

- Utiliza **Polígono regular**, señalando los puntos anteriores, para dibujar un cuadrado. Comprueba en la ventana algebraica que el polígono dibujado tiene de área 4 u^2.



- *Construye un romboide de área* 4 u^2.

- Determina cuatro puntos para dibujar con **Polígono** un paralelogramo de base 2 u y altura 2 u. Comprueba que el valor del área del polígono es 4 u^2 y comprueba que el paralelogramo que has dibujado no es un rombo sino un romboide, midiendo el ángulo que forman sus diagonales:
  - Traza las diagonales con **Segmento entre dos puntos**.
  - Determina su **punto de intersección**
  - Calcula el **ángulo** que forman.

- *Construye un rectángulo de área* 4 u^2.

- Utiliza la herramienta **polígono** para construir un rectángulo de área 4 u^2.

- *Construye un rombo de área* 4 u^2.

- Para construir un rombo de área 4 u^2, dibuja primero sus diagonales perpendiculares con la condición de que el producto de sus medidas sea 8 u, por ejemplo, una puede medir 2 u y otra 4 u.

- Dibuja con **polígono** el rombo y comprueba en la ventana algebraica el valor de su área.

Actividades propuestas

6. Construye un cuadrado, un rectángulo, un romboide y un rombo de área 9 u^2.

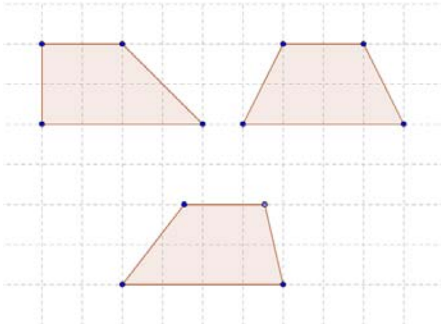
Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Trapecios

Actividades resueltas

- *Construye tres trapecios, uno rectángulo, otro isósceles y otro escaleno de área* 6 u^2.

Abre una nueva ventana de *Geogebra* y comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la **ventana algebraica** y la **cuadrícula** y desactiva los **ejes**. Para que en la ventana geométrica no aparezcan los nombres de los elementos que vas a dibujar, en **Rotulado** del menú **Opciones** activa **Obviando nuevos puntos**.



- Las bases de todos los trapecios las vamos a tomar de 2 u y de 4 u, y la altura de 2 u. Por tanto todas las áreas miden 6 u^2.
- Observa la figura.
- Para dibujar el trapecio escaleno utiliza la herramienta **Segmento dados su longitud y punto extremo inicial**
- Comprueba en la ventana algebraica que el valor del área de los tres trapecios que has dibujado es 6 u^2.

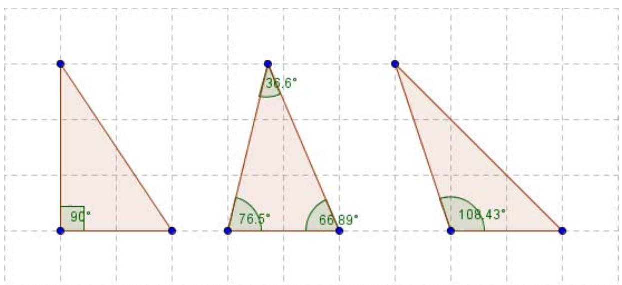
Triángulos

Abre una nueva ventana de Geogebra y comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la **ventana algebraica** y la **cuadrícula** y desactiva los **ejes**. Para que en la ventana geométrica no aparezcan los nombres de los elementos que vas a dibujar, en **Rotulado** del menú **Opciones** activa **Obviando nuevos puntos**.

Actividades resueltas

- *Dibuja tres triángulos, uno rectángulo, otro acutángulo y el tercero obtusángulo, de área* 3 u^2.

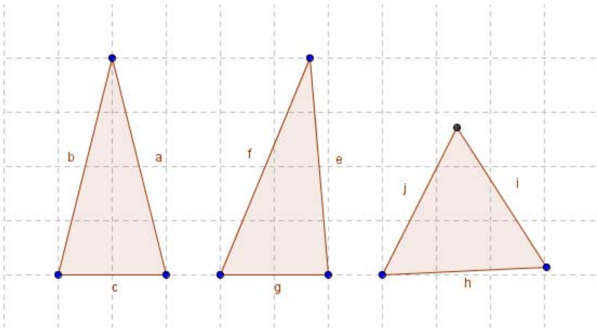
Elige, por ejemplo, 2 u para la base y 3 u para la altura.



- Determina primero los vértices con la herramienta **Nuevo punto** y después dibuja los triángulos con la herramienta **Polígono**.
- Utiliza la herramienta **Ángulo** para medir los ángulos necesarios para comprobar que el primero es rectángulo, el segundo acutángulo y el tercero obtusángulo.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Dibuja tres triángulos, uno isósceles, otro escaleno y el tercero equilátero, de área 4 u^2.



- Para dibujar el triángulo isósceles y el triángulo escaleno puedes elegir, por ejemplo, 2 u para la base y 4 u para la altura.

- Determina primero los 6 vértices con la herramienta **Nuevo punto** y después dibuja los dos triángulos con la herramienta **Polígono**.

- Para dibujar el triángulo equilátero, determina dos puntos cualesquiera del plano y con **Polígono regular** construye el triángulo equilátero que tiene por vértices estos dos puntos.

- Con la herramienta **Desplaza** modifica la posición de uno de los puntos libres del triángulo equilátero hasta conseguir que el valor del área, que aparece en la ventana algebraica, sea lo más próximo posible a 4 u^2.

- Utiliza la opción **Expone rótulo**, del menú contextual, para nombrar los lados de los triángulos y a partir de sus medidas en la ventana algebraica comprueba que las construcciones están bien realizadas.

- Para mejorar la aproximación de las medidas de los lados de los triángulos, en el menú **Opciones**, aumenta las **Posiciones decimales** a 5.

Actividades propuestas

7. Dibuja un trapecio escaleno de área 3 u^2.

8. Construye un rombo, que no sea un cuadrado, de lado 2 u.

9. Dibuja un triángulo escaleno cuya base mide 3 u y el valor de su área es 3 u^2.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

2.2. La circunferencia y el círculo-

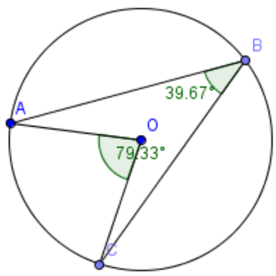
En esta actividad se utiliza el programa *Geogebra* para estudiar la relación entre los ángulos centrales e inscritos en una circunferencia con el mismo arco. Se profundiza en el concepto de longitud de la circunferencia y área del círculo calculando la razón entre la medida de la longitud de la circunferencia y la del radio así como la razón entre la medida del área del círculo y la del cuadrado del radio. También se trazan polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia.

Ángulos centrales y ángulos inscritos

Actividades resueltas

- *Comprueba la relación entre un ángulo inscrito en la circunferencia y el central que abarca el mismo arco.*

- En el menú **Visualiza** desactiva los **ejes** y la **cuadrícula** y para que sólo aparezcan los nombres de los puntos, en la opción **Rotulado** del menú **Opciones** activa **Nuevos puntos exclusivamente**.
- Define un **Nuevo punto** *A* y otro que, con el menú contextual, llamarás *O.* Traza, con **Circunferencia por centro y punto que cruza,** la que tiene centro en *O* y pasa por *A*.
- Determina dos **nuevos puntos** *B* y *C* de dicha circunferencia y traza los **segmentos** *AB*, *BC*, *AO* y *OC*.
- Utiliza **Ángulo** para calcular las medidas los ángulos *ABC* y *AOC*. Estos ángulos aparecen en la **ventana algebraica** como α y β.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente β / α, que aparece en la ventana algebraica como *f* = 2.



- **Desplaza** el punto *B* por la circunferencia. Observa que no cambia la medida de los ángulos.
- **Desplaza** el punto *A*. Observa que pueden cambiar las medidas de los ángulos pero la razón entre ellas se mantiene constante.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

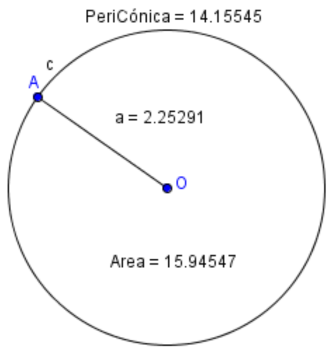
Longitud de la circunferencia y área del círculo.

Actividades resueltas

- *Comprueba la relación entre la longitud de la circunferencia y su radio.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Define un **Nuevo punto** *A* y otro que, con el menú contextual, llamarás *O* y dibuja la **circunferencia**, c, con centro en *O* que pasa por *A* y el **segmento** *OA*.
- Utiliza la herramienta **Distancia** para medir la longitud de la circunferencia, *PeriCónica*; y el segmento *OA*, que es su radio y se denomina *a*.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente *PeriCónica[c]/a*, que aparece en la ventana algebraica como *b* = 6,28.
- Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**. El cociente *b* aparece como *b* = 6,28319, una aproximación del número 2π.
- **Desplaza** el punto *A*. y observa que aunque cambian las medidas de la longitud de la circunferencia y del radio el cociente *b* permanece constante.



- *Comprueba la relación entre el área del círculo y su radio.*

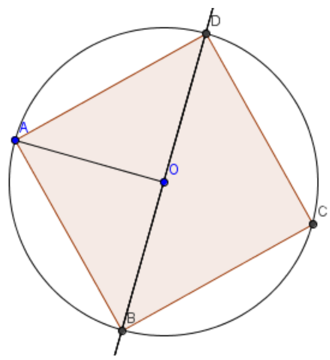
- Activa la herramienta **Área** para calcular la medida de la superficie del círculo.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente *Area[c]/a^2*, que aparece en la ventana algebraica como *d* = 3,14159, una aproximación del número π.
- **Desplaza** el punto *A*. y observa que aunque cambian las medidas del área del círculo y del radio el cociente *d* permanece constante.

Cuadrado inscrito en una circunferencia

Actividades resueltas

- *Dibuja un cuadrado inscrito en una circunferencia.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula** y para que sólo aparezcan los nombres de los puntos, en la opción **Rotulado** del menú **Opciones** activa **Nuevos puntos exclusivamente**.



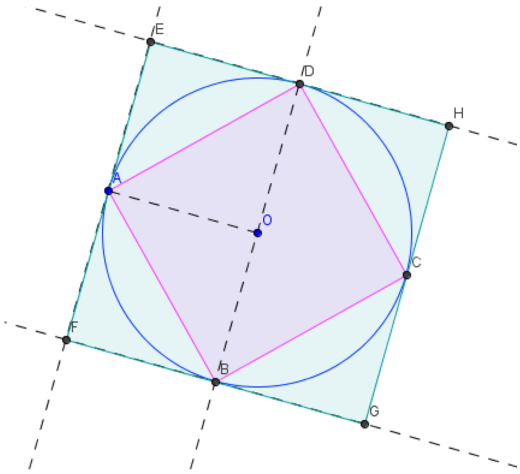
- Define un **Nuevo punto** *A* y otro que, con el menú contextual, llamarás *O* y dibuja la **circunferencia**, con centro en *O* que pasa por *A* y el **segmento** *OA*.
- Traza la **recta perpendicular** al segmento *OA* que pasa por el punto O y define como *B* un **punto de intersección** de esta recta con la circunferencia.
- Activa **polígono regular** para dibujar el cuadrado que pasa por los

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

puntos *A* y *B*, inscrito en la circunferencia.

- Utiliza **Desplaza** para mover el punto *A*, modifica el tamaño de la circunferencia para así comprobar que la construcción está bien hecha y el cuadrado permanece inscrito en la circunferencia.

Cuadrado circunscrito a una circunferencia.



Actividades resueltas

Dibuja un cuadrado circunscrito en una circunferencia.

En la misma ventana y con la figura anterior:

- Traza la **recta perpendicular** al segmento OA que pasan por *A* y las **rectas paralelas** al segmento *OA* que pasan por *B* y *D*.
- Denomina *E, F* a los **puntos de intersección** de estas rectas.
- Activa **polígono regular** para dibujar el cuadrado que pasa por los puntos *E*, *F* y está circunscrito a la circunferencia. Obtienes el cuadrado *EFGH*.
- Utiliza la opción **Propiedades** del menú contextual, para que con **Estilo** aparezcan discontinuas las rectas auxiliares y con **color** diferenciar el cuadrado inscrito y el circunscrito.
- Modifica el tamaño de la circunferencia para comprobar que la construcción está bien hecha y el cuadrado permanece circunscrito a la circunferencia.

Actividades propuestas

10. Dibuja la circunferencia que tiene su centro en un punto O y es tangente a una recta r.

11. Dibuja la circunferencia que pasa por dos puntos A y B y tiene su centro en una recta r.

12. Dibuja un octógono regular inscrito y otro circunscrito a una circunferencia. Modifica la apariencia de la construcción punteando los elementos auxiliares y dibujando los dos polígonos con distinto color.

13. Dibuja un hexágono regular inscrito y otro circunscrito a una circunferencia. Modifica la apariencia de la construcción punteando los elementos auxiliares y dibujando los dos polígonos con distinto color.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

2.3. Semejanza

Polígonos semejantes

En esta actividad se utiliza el programa ***Geogebra*** para dibujar polígonos semejantes, estudiar las propiedades que los caracterizan y calcular la razón entre sus áreas en función de la razón de semejanza.

Cuadriláteros:

Actividades resueltas

- *Comprueba que todos los cuadrados son semejantes.*

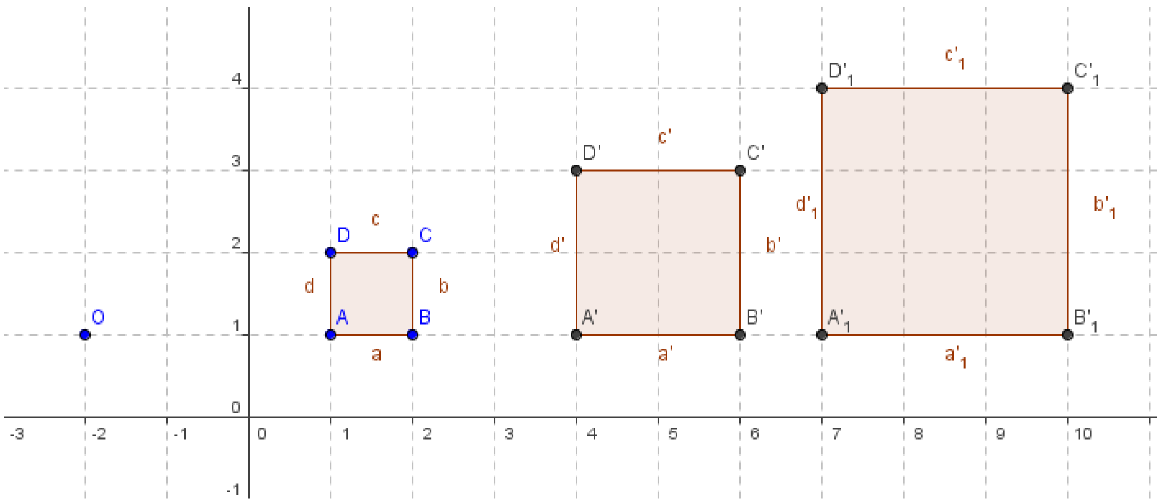
- Abre el programa *Geogebra* y en **Visualiza** activa **Ejes** y la **Cuadrícula** para que sea más fácil definir puntos.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define los puntos *A* (1, 1), *B* (2, 1), *C* (2, 2) y *D* (1, 2).
- Utiliza **Polígono** para dibujar el cuadrado *ABCD*.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (–2, 1), el programa lo llama *E,* con el botón derecho del ratón y la opción **Renombra**, llámalo *O*.
- Utiliza la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor**, para dilatar el polígono *ABCD* desde el punto *O,* con factor 2. Se obtiene el cuadrado *A'B'C'D'*, de lado 2 unidades.

Dos cuadrados son siempre semejantes, observa en la **Ventana algebraica** las longitudes de sus lados y los valores de sus áreas. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

- Utiliza la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor**, para dilatar el polígono *ABCD* desde el punto *O,* con factor 3. Se obtiene el cuadrado $A_1'B_1'C_1'D_1'$, de lado 3 unidades.

14. Compara en la **Ventana algebraica** la longitud del lado del cuadrado *ABCD* con la del cuadrado $A_1'B_1'C_1'D_1'$, ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

15. Calcula también la razón de semejanza entre el cuadrado *A'B'C'D'* y $A_1'B_1'C_1'D_1'$, y la razón entre sus áreas.



Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Analiza la semejanza en otros cuadriláteros.

- Desplaza con el puntero el punto *C*, de modo que el cuadrado *ABCD* tome distintas formas de cuadrilátero.

16. Justifica que los cuadriláteros *A'B'C'D'* y $A_1'B_1'C_1'D_1'$, son semejantes a *ABCD*.

17. Calcula la razón de semejanza entre dos de ellos y la razón entre sus áreas.

18. Busca una relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas de dos cuadriláteros semejantes.

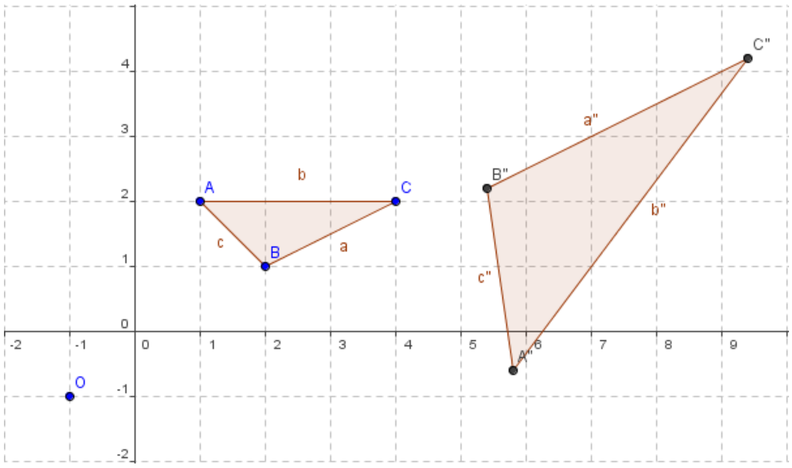
Actividades resueltas

Triángulos:

Analiza la semejanza entre triángulos.

- Abre una nueva ventana de *Geogebra*, comprueba que aparecen los **Ejes** y la **Cuadrícula**.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define los puntos *A* (1, 2), *B* (2, 1) y *C* (4, 2).
- Utiliza **Polígono** para dibujar el triángulo *ABC*.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (–1, –1), el programa lo llama *D.* Con el botón derecho del ratón y la opción **Renombra**, llámalo *O*.
- Utiliza la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor**, para dilatar el polígono *ABC* desde el punto *O,* con factor 2. Se obtiene el triángulo *A'B'C'.*
- Con la herramienta **Refleja objeto en recta**, dibuja el simétrico del triángulo *A'B'C'* con respecto al segmento *a* del triángulo *ABC*. Se obtiene el triángulo *A''B''C''*.
- Selecciona el polígono *A'B'C'* en la Ventana algebraica o en el área de trabajo, y con el botón derecho del ratón desactiva la opción **Expone objeto**, el triángulo *A'B'C'* queda oculto. Observa que puedes volver a visualizar activando esta opción. Oculta de la misma forma los puntos *A', B'* y *C'.*
- Para que las medidas aparezcan con 5 decimales, activa **Posiciones decimales** en el menú **Opciones** y elige 5.

19. ¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *A''B''C''*? Observa en la **Ventana algebraica** las longitudes de sus lados y los valores de sus áreas. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?



- Desplaza con el puntero el punto *C*, de modo que el triángulo *ABC* siga siendo un triángulo.

20. Justifica que los triángulos *ABC* y *A''B''C''* son semejantes. Calcula la razón de semejanza y la razón entre sus áreas. Busca una relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes.

Actividades propuestas

21. Dibuja distintos pentágonos y hexágonos que no sean regulares y con la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor,** construye otros semejantes.

a) Argumenta por qué son semejantes.

b) Calcula en cada caso la razón de semejanza y la razón entre sus áreas.

c) Investiga cómo puedes hallar la razón entre las áreas de polígonos semejantes a partir de la razón de semejanza.

2.4. Puntos y rectas notables en un triángulo

Puntos de un triángulo

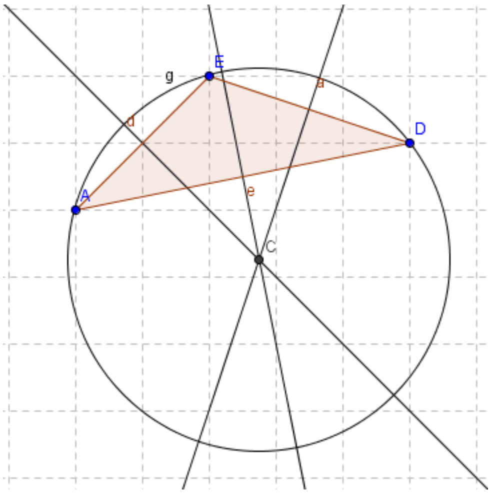
En esta actividad se utiliza el programa ***Geogebra*** para determinar el *circuncentro*, el *incentro* y el *baricentro* de un triángulo, estudiar sus propiedades y dibujar la *recta de Euler*.

Una vez abierto el programa en la opción del menú **Visualiza**, oculta **Ejes** y activa **Cuadrícula.**

Actividades resueltas

Circuncentro:

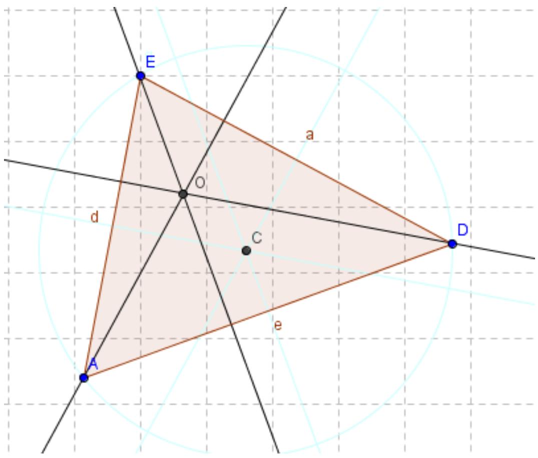
- *Dibuja las tres mediatrices de un triángulo y determina su circuncentro.*



- Define tres puntos *A*, *D* y *E*, observa que el programa los define como *A, B* y *C*, utiliza el botón derecho del ratón y la opción **Renombra** para cambiar el nombre.
- Con la herramienta **Polígono** activada dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos. Observa que cada lado tiene la misma letra que el ángulo opuesto con minúscula.
- Con la herramienta **Mediatriz** dibuja las mediatrices de dos lados, los segmentos *a* y *d* .
- Determina con **Intersección de dos objetos** el punto común de estas rectas y con **Renombra** llámalo *C*. Dicho punto es el *circuncentro* del triángulo.
- Dibuja la **Mediatriz** del segmento *e* y observa que pasa por el punto *C*.
- Activa **circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Utiliza el **Puntero** para desplazar los vértices *A*, *D* o *E* y comprobar que la circunferencia permanece circunscrita al triángulo.

Ortocentro:

- *Dibuja las tres alturas de un triángulo y determina su ortocentro.*



- En el mismo triángulo cambia el color de las mediatrices y la circunferencia situándote con el ratón sobre el trazo o sobre su ecuación y con el botón derecho elige en **Propiedades, Color** un azul muy próximo al blanco.
- Dibuja dos alturas con la herramienta **Recta Perpendicular**. Observa que el programa te pide que el punto por el que vas a trazarla y la recta o el segmento respecto al que es perpendicular.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el *ortocentro* como el punto de corte de las dos alturas y con **Renombra**

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

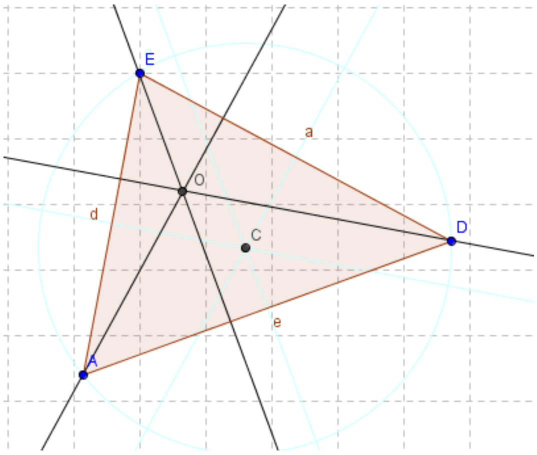
denomínalo *O*.

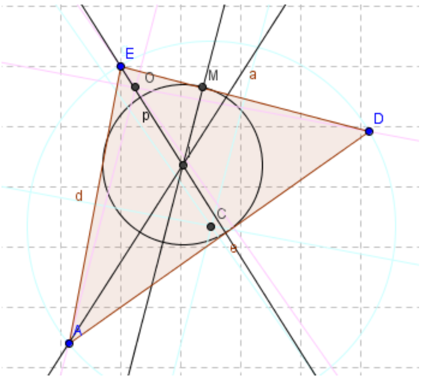
- Dibuja la tercera altura y comprueba que pasa por el *ortocentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.

Incentro:

Dibuja las tres bisectrices de un triángulo y determina su incentro.

- Cambia el color de las alturas como en la construcción anterior, ahora con color rosa pálido.
- Con la herramienta **Bisectriz** dibuja dos bisectrices. Observa que para determinar la bisectriz de un ángulo es suficiente señalar tres puntos que pueden ser los vértices del triángulo en el orden adecuado.
- Determina el *incentro* con **Intersección de dos objetos** como el punto de corte de las dos bisectrices y con **Renombra** denomínalo *I*.



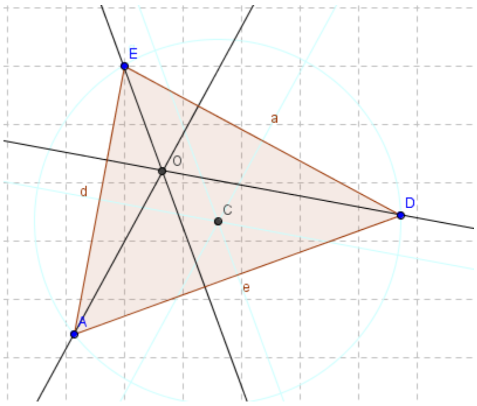


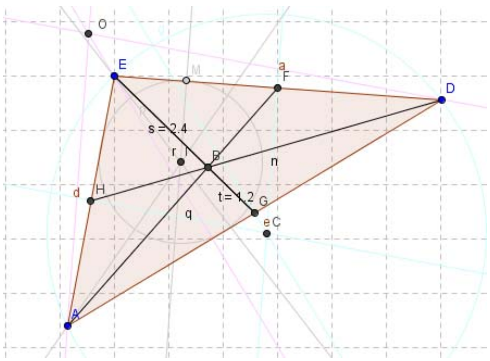
- Dibuja la tercera bisectriz y comprueba que pasa por el *incentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.
- Traza desde el punto *I* una **Recta perpendicular** a uno de los lados y con **Intersección de dos objetos** calcula el punto de corte entre esta recta y el lado del triángulo y con **Renombra** llámalo *M*.
- Activa **Circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar con centro en *I* y radio el segmento *IM* la circunferencia inscrita al triángulo.
- Desplaza con el **puntero** los vértices del triángulo para comprobar que la circunferencia permanece inscrita al triángulo.

Baricentro:

Dibuja las tres medianas de un triángulo y determina su baricentro.

- Cambia el color de las bisectrices, del punto *M* y de la circunferencia inscrita, con gris muy pálido, como en las construcciones anteriores.





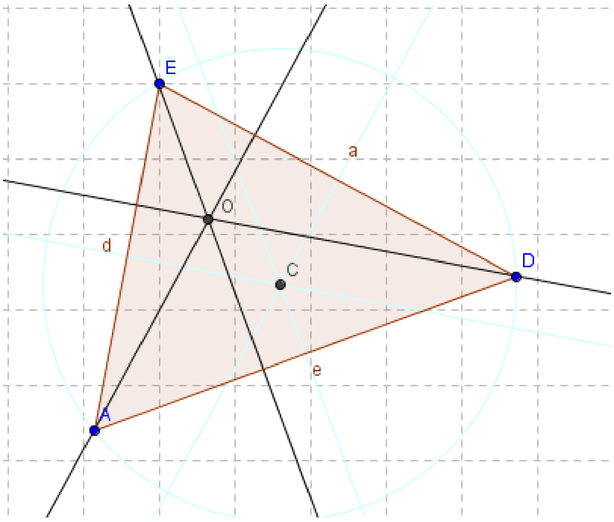
- Con la herramienta **Punto medio o centro** calcula los puntos medios de dos lados. Si el programa nombra alguno con la letra *B*, utiliza **Renombra** para llamarlo *H*.
- Con la herramienta **Segmento entre dos puntos** dibuja dos medianas y con **Intersección de dos objetos**, su punto de corte, el **baricentro**, que llamarás *B*.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

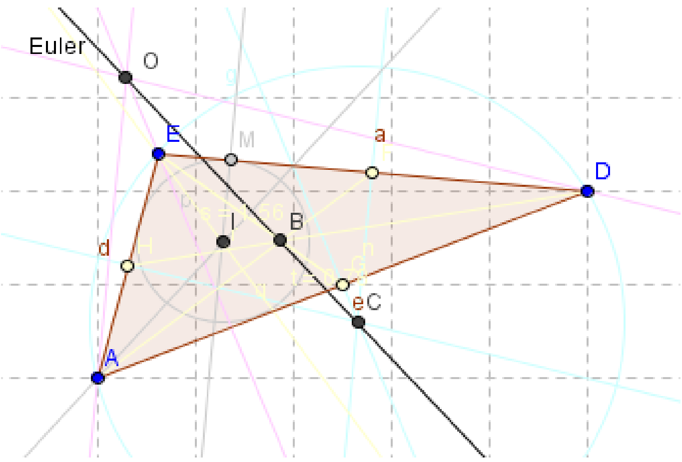
- Traza la tercera mediana y verifica que el baricentro pertenece a este segmento desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.
- Activa **Segmento entre dos puntos** y determina los dos segmentos determinados por el baricentro en una de las medianas.
- Activa **Distancia** para medir estos segmentos.
- Desplaza los vértices del triángulo con el **Puntero** y observa la relación que existe entre las medidas realizadas.

Recta de *Euler*

Dibuja la recta que pasa por el circuncentro y el ortocentro.



- Cambia el color de las medianas, de los puntos medios de los lados y de los dos segmentos de la mediana, con amarillo muy pálido.
- Con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos** dibuja la recta de *Euler* que pasa por el *circuncentro* y el *ortocentro* y utiliza **Renombra** para llamarla *Euler*. Comprueba que el baricentro pertenece a la recta de Euler y que el incentro no siempre pertenece.



Actividades propuestas

22. Repite las actividades resueltas. Modifica a tu gusto colores y líneas.

23. Mueve uno de los vértices originales del triángulo e indica qué cosas permanecen invariantes.

24. Comprueba que se verifican las propiedades de *circuncentro*, como centro de la circunferencia circunscrita, del *incentro*, como centro de la circunferencia inscrita.

25. En *baricentro* divide a la mediana en dos parte, siendo una dos tercios de la otra. Compruébalo.

26. La recta de *Euler* pasa por el *circuncentro*, el *baricentro* y el *ortocentro*, y qué el *incentro* no siempre pertenece a la recta de *Euler*. ¿Cómo debe ser el triángulo para que pertenezca?

27. Mueve los vértices del triángulo para determinar si es posible que sus cuatro puntos notables coincidan.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

3. GEOGEBRA PARA 3º Y 4º DE ESO

3.1. Movimientos en el plano

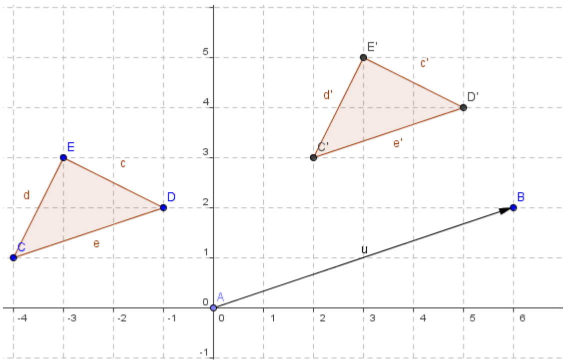
En esta actividad se va a utilizar el programa ***Geogebra*** para estudiar los movimientos en el plano, también llamados isometrías, como son las traslaciones, los giros o las simetrías, que son transformaciones en el plano que mantienen las distancias y los ángulos y por lo tanto las áreas de las figuras

Actividades resueltas

Traslación

- *Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.*

- En un archivo de *Geogebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).



- Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.

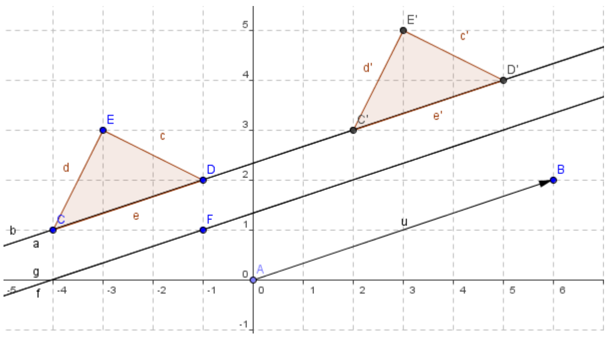
28. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?

29. Comprueba en la ventana algebraica que:

a) Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C'D'E'* coinciden

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.



- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.
  - ¿Qué propiedad tiene la *recta a* para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta *a* es paralela al vector *u*.
- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f*

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

que pase por *F* y paralela al vector *u*.

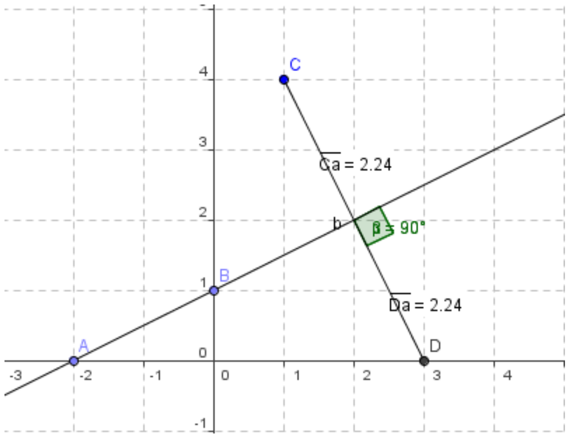
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.

30. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

Simetría axial

Utiliza Geogebra para estudiar las propiedades de la simetría axial.

- Abre una nueva ventana de ***Geogebra*** y visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define *A* (-2, 0) y *B* (0, 1) y con **Recta que pasa por 2 puntos**, dibuja la recta *a* que pasa por *A* y *B*, que será el eje de simetría.

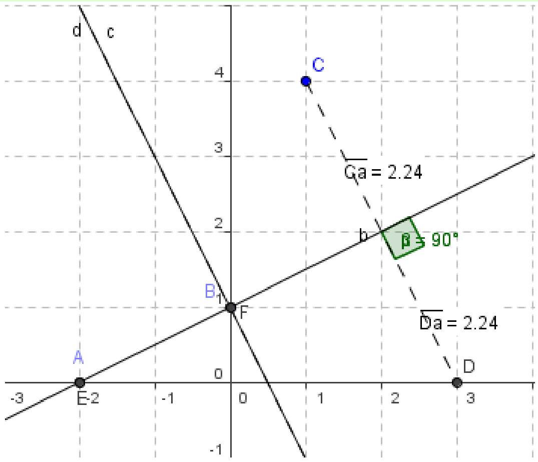


- Determina el punto *C* (1, 4) y con la herramienta **Refleja objeto en recta**, su simétrico con respecto a la recta *a*, que es el punto *D* (3, 0).
- Con la herramienta **Distancia** comprueba que la distancia del punto *C* a la recta *a* coincide con la del punto *D* a dicha recta.
- Dibuja con **Segmento entre dos puntos** el que une los puntos *C* y *D*.
- Con la herramienta **Angulo** calcula la medida del ángulo que forman el segmento *CD* y la recta *a* para verificar que son perpendiculares.

Las siguientes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan la simetría axial:

1ª: Las distancias de un punto y de su simétrico al eje de simetría coinciden.

2ª: El segmento que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría.



- Con la herramienta **Refleja objeto en recta** halla el simétrico de los puntos *A* y *B* con respecto al eje *a* y comprueba que *A* y su simétrico de *E* coinciden lo mismo que *B* y *F*. Prueba con otros puntos de la recta *a* para verificar que todos los puntos del eje resultan invariantes mediante una simetría axial con respecto a este eje. Verifica, también, que el eje, la recta *a*, y su simétrica la recta *b* coinciden.
- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar la recta *c*, perpendicular al eje *a* que pasa por el punto *B*.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

- Calcula la recta simétrica de la recta *c* con respecto al eje *a*, se obtiene la recta *d* que coincide con *c*.
- Mejora el aspecto de la construcción dibujando el segmento CD y las rectas *c* y *d* con trazo discontinuo. Haz clic con el botón derecho del ratón sobre el elemento o su ecuación y en **Propiedades**, **Estilo**, elige un trazo discontinuo.

31. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Actividades propuestas

32. Utiliza la herramienta **Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado** para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Angulo** uno de 45º.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.

b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

33. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.

b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.

c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

3.2. Gráficas de funciones con *Geogebra*

Gráficas de funciones lineales y afines

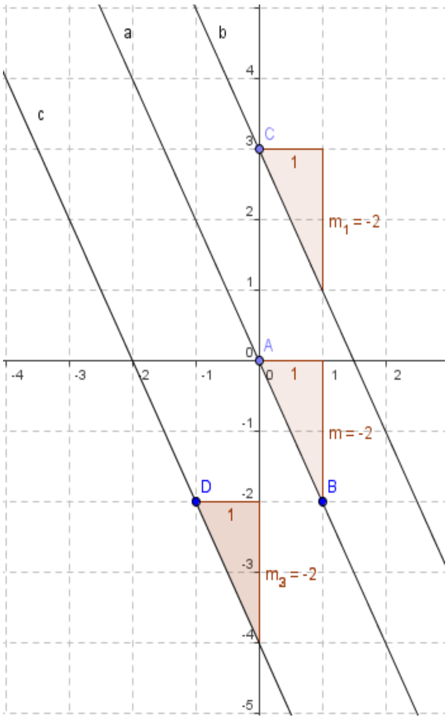
En esta actividad se va a utilizar el programa ***Geogebra*** para representar funciones lineales y afines, las gráficas de estas funciones son rectas.

Primero se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza.

También se representan rectas que tienen misma ordenada en el origen para observar la relación que existe entre ellas y determinar una característica común.

Actividades resueltas

Rectas con la misma pendiente



Utiliza Geogebra para estudiar rectas con igual pendiente.

- Abre el programa *Geogebra* y en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sea más fácil definir puntos.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define un punto en el origen de coordenadas. Observa que en la **Ventana Algebraica** aparece el punto, que el sistema denomina *A*, como objeto libre y coordenadas (0, 0).
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (1, –2), el programa lo llama *B* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: B = (1, –2).
- Utiliza la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** para dibujar la recta que pasa por los puntos *A* y *B*. Observa que el programa la denomina *a* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = 0$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x$.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (0, 3), el programa lo llama *C* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: *C* = (0, 3).
- Con la herramienta **Recta Paralela**, dibuja una recta paralela a la recta a que pase por *C*. Observa que el programa la denomina *b* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = 3$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x + 3$.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (–1, –2), el programa lo llama *D* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: *D* = (–1, –2).
- Con la herramienta **Recta Paralela**, dibuja una recta paralela a la recta a que pase por *D*. Observa que el programa la denomina *c* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = –4$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x – 4$.
- Utiliza la herramienta **Pendiente** para calcular las pendientes de las rectas *a*, *b* y *c*. Observa que al calcular la pendiente de la recta *a* aparece en la gráfica y en la **Ventana Algebraica** como objeto dependiente $m = –2$. Análogamente al calcular la pendiente de la recta *b*, se obtiene $m_1 = –2$ y al

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

calcular la pendiente de la recta *c*, se tiene $m_2 = -2$.

34. ¿Cómo son las pendientes de las rectas paralelas? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y dibuja otras rectas paralelas a la recta *a* para comprobarla.

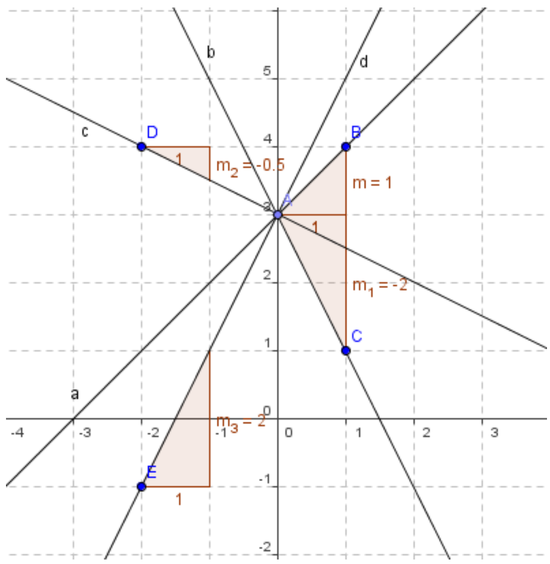
Observa que la ecuación de todas las rectas paralelas a la recta *a* son de la forma:

$$y = -2x + n, \text{ con } n \text{ variable.}$$

¿Alguna de las rectas que has dibujado es la gráfica de una función lineal?

Rectas con la misma ordenada en el origen

Utiliza Geogebra para estudiar rectas con igual ordenada en el origen.



- Abre una **Nueva Ventana** que es una opción del menú **Archivo**.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define un punto de coordenadas (0, 3). Observa que en la **Ventana Algebraica** aparece el punto, que el sistema denomina *A*, como objeto libre y aparecen sus coordenadas *A* = (0, 3).
- Define un **Nuevo Punto** *B* de coordenadas (1, 4) y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** dibuja la recta que pasa por *A* y *B*, el programa la denomina *a* y en la **Ventana Algebraica** aparece su ecuación, *a*: -x + y = 3 equivalente a $y = x + 3$.
- Define un **Nuevo Punto** *C* de coordenadas (1, 1) y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** dibuja la recta que pasa por *A* y *C*, el programa la denomina *b* y en la ventana algebraica aparece su ecuación, *b*: 2x + y = 3 equivalente a

$$y = -2x + 3$$

- Con un proceso similar dibuja la recta *c* que pasa por *A* y *D*, con *D* = (–2, 4) que tiene por ecuación *c*: *x* + 2*y* = 6. Esta ecuación se puede expresar por: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Dibuja también la recta *d* que pasa por *A* y *E*, con *E* = (–2, –1), la ecuación de la recta *d* que aparece es:

$$d: -4x + 2y = 6, \text{ equivalente a } y = 2x + 3.$$

- Utiliza la herramienta **Pendiente** para calcular las pendientes de las cuatro rectas que has dibujado.
  - Observa que las cuatro rectas que has dibujado pasan por el punto *A* = (0, 3), sus ecuaciones con la variable *y* despejada son:

$$a: y = x + 3 \qquad b: y = -2x + 3 \qquad c: y = -\frac{1}{2}x + 3 \qquad d: y = 2x + 3.$$

35. ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto *A* (0, 3)? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y compruébala dibujando otras rectas que pasen por el punto *A*.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Observa que la ecuación de todas las rectas que pasan por el punto *A*(0, 3) son de la forma:

$y = mx + 3$, siendo m la pendiente de la recta.

En la ecuación de la recta $y = mx + n$, el parámetro n se denomina ordenada en el origen

36. ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen de las cuatro rectas que has dibujado?

37. Observa las ecuaciones de las cuatro rectas que has dibujado, dos de ellas tienen pendiente positiva *a* y *d* y las otras dos, *b* y *c* tienen pendiente negativa. Relaciona el signo de la pendiente de la recta con el crecimiento o decrecimiento de la función que representan

Actividades propuestas

38. Calcula dos puntos de las rectas de ecuaciones: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para dibujarlas con Geogebra. Indica dos propiedades comunes de ambas gráficas.

39. Representa, también, las rectas de ecuaciones: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

40. ¿Qué condición deben verificar las pendientes de dos rectas para que sean perpendiculares?

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

3.3. Funciones definidas a trozos

En algunas funciones la relación entre la variable independiente y la dependiente varía en los distintos intervalos en los que está definida y a veces es posible encontrar una fórmula para cada intervalo del dominio que exprese esta relación, estas funciones se dice que están **definidas a trozos**.

Por ejemplo en la siguiente función la relación entre la variable independiente y la dependiente es diferente para los números negativos y los positivos.

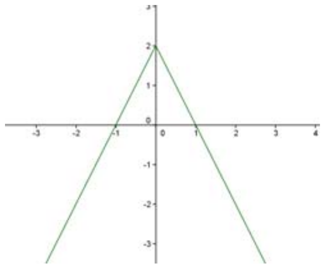
$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ x\in[-\infty,0] \\ -2x+2 & si\ x\in(0,\infty] \end{cases}$$

- *Dibuja esta función con Geogebra*
- En la línea de entrada escribimos: Función [2*x*+2, -∞,0]

Esta orden dibuja el primer trozo de la función. Utiliza el comando función: Función [] y entre los corchetes se escribe la función y los extremos del segmento o la semirrecta donde está definida, separados por comas.

- A continuación escribimos en la línea de entrada Función [-2*x*+2, 0,∞]

Y ya tenemos representada la función.



- Las dos órdenes anteriores se pueden introducir como una sola, separándolas por una coma y entre llaves.

  {Función [2*x*+2, -∞,0], Función [-2*x*+2, 0,∞]}

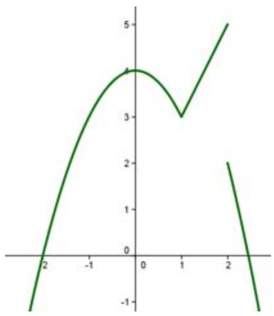
Recuerda que el símbolo ∞ se encuentra entre la línea de entrada y los comandos.

- *Representar una función definida a trozos definida por:*

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & si\ x<1 \\ 2x+1 & si\ 1\le x\le 2 \\ -x^2+6 & si\ x>2 \end{cases}$$

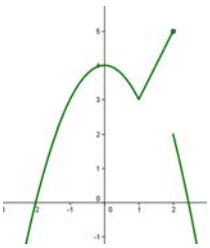
- Introduce en la línea de entrada:

  {Función [−*x*^2+4, -∞,1], Función [2*x*+1, 1,2], Función [−*x*^2+6, 2,∞]}



Recuerda que para escribir las potencias en la línea de entrada de *Geogebra* se utiliza el símbolo ^, así cuando escribimos *x*^2 el sistema entiende x^2.

Esta es la gráfica que se obtiene:



Se observa que esta función es continua en $x = 1$, y el valor de la función en este punto es 3, es decir $f(1) = 3$, sin embargo en el punto $x = 2$ la función no es continua y a partir de la gráfica no podemos detectar si la imagen del punto 2 es decir $f(2)$ es 2 o 5.

A partir de la expresión analítica de la función observamos que $f(2) = 5$ que podemos reflejarlo en la gráfica dibujando el punto (2, 5) como se muestra en la siguiente gráfica.

Actividades propuestas

41. Utiliza Geogebra para representar las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x+6 & si\ x\in(-\infty,-1) \\ -x+4 & si\ x\in[-1,2] \\ x^2-7x+12 & si\ x\in(2,\infty) \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<-1 \\ e^x & si\ -1\le x\le 0 \\ x+1 & si\ x>0 \end{cases}$$

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

3.4. La proporción áurea

En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para realizar un estudio de la proporción áurea.

Un segmento está dividido en dos partes que están en proporción áurea si la razón entre la longitud del segmento y la longitud de la parte mayor coincide con la razón entre la longitud de la parte mayor y la de la parte menor.

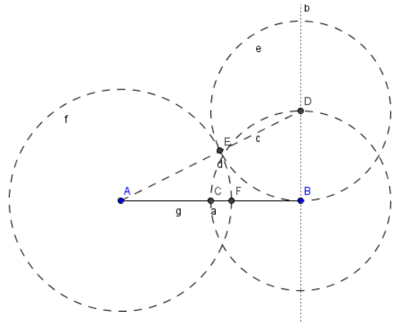
Actividades resueltas

Dividir un segmento en dos partes que estén en proporción áurea

- *Utiliza Geogebra para dividir un segmento en dos partes que estén en proporció áurea.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Determina con **Nuevo punto** los puntos *A* y *B* y dibuja el segmento, *a*, que los une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular al segmento *AB* en el punto *B*, cuya longitud sea la mitad de *AB,* puedes seguir las siguientes instrucciones:
  - Calcula el **Punto medio o centro** del segmento *AB* y llámalo *C*.
  - Dibuja con **Circunferencia con centro y punto que cruza** la que tiene centro en *B* y pasa por *C*.
  - Traza la **Recta Perpendicular** al segmento *AB* que pase por *B*.
  - Define *D* como el **Punto de Intersección** entre esta recta y la circunferencia.



- Dibuja el segmento *AD* y una circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sea *E* el **Punto de Intersección** de esta circunferencia con el segmento *AD*.
- Con centro en *A* traza la circunferencia que pasa por *E* y determina el **punto de Intersección,** *F*, de esta circunferencia con el segmento *AB*.
- Traza el segmento, *g*, que une los puntos *A* y *F*.
- Comprueba que el punto *F* divide al segmento *AB* en dos partes que están en proporción áurea:
  - Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**.
  - Calcula en la línea de **Entrada** los cocientes *a/g* y *g/(a-g).*

Observa en la **Ventana algebraica** que estos valores coinciden, has calculado un valor aproximado del número de oro, Φ.

- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales *A* o *B* y comprueba que el cociente entre las longitudes de los segmentos *AF* y *FB* permanece constante.
- Para visualizar mejor la construcción puedes dibujar los elementos auxiliares con trazo discontinuo, eligiendo en el menú contextual, **Propiedades** y **Estilo de trazo**.

El rectángulo áureo

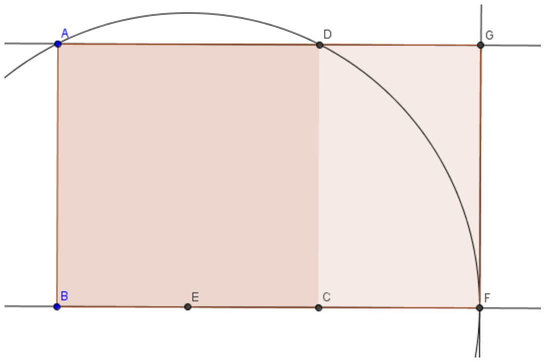
Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea.

Si a un rectángulo áureo le quitamos (o le añadimos) un cuadrado obtenemos un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

- *Utiliza Geogebra para dibujar un rectángulo áureo.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Define dos puntos *A* y *B* que van a ser los extremos del lado menor del rectángulo y con la herramienta **polígono regular** dibuja, a partir de los puntos *A* y *B*, el cuadrado *ABCD* y oculta los nombres de los lados con la herramienta **Expone/Oculta rótulo**.
- Calcula el **Punto medio**, *E*, del lado *BC*. Con centro en *E* dibuja la **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza la recta, *a*, que pasa por *BC* y define como *F* el **Punto de intersección** entre esta recta y la circunferencia.
- Dibuja la **Recta perpendicular** a la recta *a* que pasa por *F*, y la **recta** que pasa por los puntos *A* y *D*, llama *G* al **Punto de intersección** de estas rectas y define con **Polígono** el rectángulo *ABFG*.



- En la ventana algebraica aparecen las longitudes de los lados del rectángulo como *f* y *g*, introduce en la línea de **Entrada** *g / f* y observa en esta ventana que aparece el valor *e* que es una aproximación al número áureo. Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales.**
- Dibuja el **segmento** *CF*, en la ventana algebraica aparece su longitud, *h*, introduce en la línea de **Entrada** *f / h*, observa que este cociente coincide con *g / f* y es una aproximación del número áureo.
- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales *A* o *B* y observa que el cociente entre las longitudes de los lados de los rectángulos es constante.

El rectángulo *ABFG* es áureo ya que el cociente entre la longitud de su lado mayor y la del menor es el número de oro, además el rectángulo *DCFG*, que se obtiene al quitar un cuadrado de lado el menor del rectángulo, es también áureo y por lo tanto semejante al primero.

Herramienta rectanguloaureo

- *Crea tus propias herramientas con Geogebra. Crea una que dibuje rectángulos áureos.*

Se va a crear una herramienta que a partir de dos puntos *A* y *B* dibuje el rectángulo áureo en el que el segmento *AB* es el lado menor.

- En la figura anterior oculta el nombre de los puntos *C, D, E, F* y *G* con la herramienta **Expone/Oculta rótulo** haciendo clic con el ratón sobre ellos, en el área de trabajo o en la ventana algebraica.
- Activa en el menú **Herramientas** , la opción **Creación de nueva herramienta** y define:

Objetos de salida: el polígono cuadrado, el polígono rectángulo y los puntos *C, D, F*, y *G*.

Objetos de entrada: los dos puntos iniciales *A* y *B*.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Y elige como **nombre de la herramienta** *rectanguloaureo*. Observa que aparece en la barra de herramientas.

En la opción **Manejo de útiles** del menú **Herramientas** graba la herramienta creada como *rectanguloaureo* , que se guarda como *rectanguloaureo.ggt*

Utiliza la herramienta **Desplazamiento de la zona gráfica** para ir a una parte vacía de la pantalla y comprobar que la herramienta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

La espiral áurea

Dibuja una espiral áurea, y crea una herramienta que dibuje espirales áureas.

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula** y abre el archivo *rectanguloaureo.ggt* que acabas de crear.

- Define dos puntos *A* y *B* y aplica la herramienta *rectanguloaureo,* se obtiene el rectángulo áureo *ABEF* y el cuadrado *ABCD* con el nombre de los vértices *C, D, E y F* ocultos.
- Utiliza la herramienta **Arco de circunferencia dados centro y dos puntos extremos** para dibujar el arco con centro el punto *C* y que pasa por los puntos *D* y *B*.

Se va a crear una nueva herramienta que dibuje el rectángulo áureo y el arco.

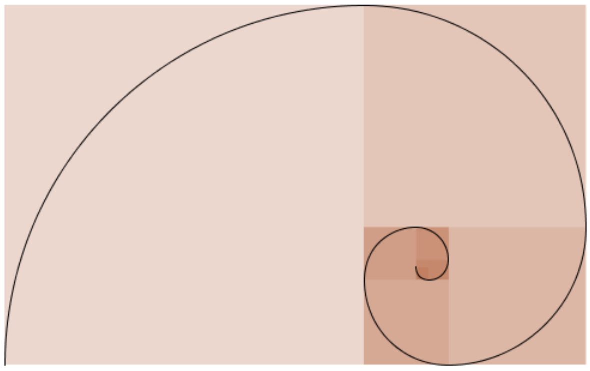
- Activa en el menú **Herramientas** , la opción **Creación de nueva herramienta** y define:

  Objetos de salida: el cuadrado, el polígono rectángulo, los puntos *C, D, E*, *F* y el arco *c*.

  Objetos de entrada: los dos puntos iniciales *A* y *B*.

Elige como **nombre de la herramienta** *espiralaurea*.

En la opción **Manejo de útiles** del menú **Herramientas** graba la herramienta creada como *espiralaurea,* que se graba como *espiralaurea.ggt.*

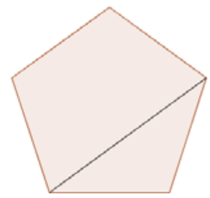


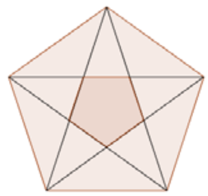
- Activa sucesivamente la herramienta anterior, con objeto de dibujar la espiral que resulta de unir con un arco de circunferencia dos vértices opuestos de los cuadrados de forma consecutiva y de mayor a menor.
- Para mejorar el aspecto de la espiral se pueden ocultar los puntos, mejor en la ventana algebraica, con la herramienta **Expone / Oculta objeto**.

Observa que al variar los ángulos en una progresión aritmética de diferencia α=90º, los lados de los cuadrados se modifican según una progresión geométrica de razón: Φ.

Actividades propuestas

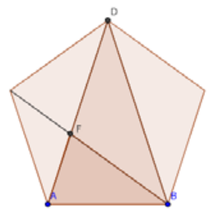
42. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.

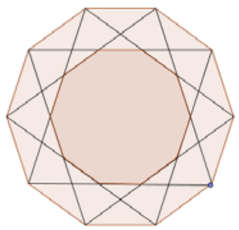




43. Calcula con Geogebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.

44. Comprueba que los triángulos *ABD* y *ABF* de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con *Geogebra* su razón de semejanza.





45. Calcula con *Geogebra* el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos

3.5. Aplicación informática para comprender la semejanza

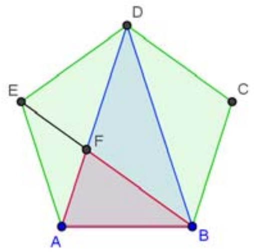
La semejanza en un pentágono regular

En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para realizar un estudio de la semejanza de diferentes triángulos que podemos dibujar en un pentágono regular calculando de forma aproximada su razón de semejanza. También se comprueba la relación que existe entre la razón entre las áreas de dos figuras semejantes y su razón de semejanza.

Actividades resueltas

- *Cálculo de la razón de semejanza*

Abre una ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadrícula** y en el menú **Opciones** elige en **Rotulado** la opción **Solo los nuevos puntos**.

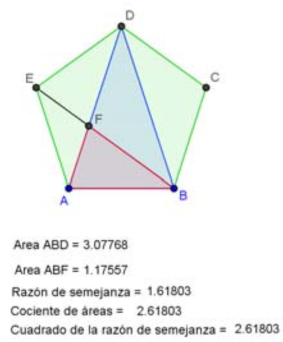


- Determina con **Nuevo punto** los puntos *A* y *B* y dibuja con **polígono regular** el pentágono que tiene como vértices los puntos *A* y *B*.
- Dibuja con **Polígono** el triángulo *ABD,* utiliza **Segmento** para dibujar la diagonal *BE* y define el punto *F* como punto de **intersección de dos objetos** (las diagonales *AD* y *BE*), determina con **polígono** el triángulo *ABF*. Es conveniente cambiar el color de cada uno de los polígonos dibujados para reconocerlos en la ventana algebraica, para esto utiliza la opción **Propiedades** del menú contextual al situar el curso sobre el polígono o sobre su nombre en la ventana algebraica
- Los triángulos *ABD* y *ABF* son semejantes. ¿Sabes demostrar por qué?

Recuerda que es suficiente demostrar que tienen dos ángulos iguales y como los ángulos interiores de un pentágono regular miden 108º, es evidente que en el triángulo isósceles *ABD* el ángulo desigual mide 36º y los ángulos iguales 72º. En el triángulo *ABF*, el ángulo *ABF* mide 36º y el *BAF,* 72º por lo tanto los triángulos son semejantes y además el ángulo *BFA* también mide 72º.

- Utiliza la herramienta de *Geogebra* que permite medir ángulos para comprobar estos resultados.
- Para hallar la razón de semejanza calculamos el cociente entre dos lados correspondientes de estos triángulos, por ejemplo, *BD* y *AD*, es decir entre una diagonal y un lado del pentágono. Para hacerlo con Geogebra definimos en la línea de entrada la variable **razóndesemejanza = f/a** (*f* es una diagonal y *a* un lado), observamos en la ventana algebraica que este valor es 1,62, si aumentamos el número de decimales en **Redondeo** del menú **Opciones** comprobamos que este valor es una aproximación del número de oro.

- *La razón de semejanza y el cociente entre las áreas.*



- Define en la línea de entrada la variable **cocientedeáreas =polígono2/polígono3**, siendo el polígono2 el triángulo *ABD* y el polígono3 el *ABF*
- Define, también, en la línea de entrada la variable **cuadradorazóndesemejanza = razóndesemejanza^2.** Observa como el cuadrado de la razón de semejanza coincide con el cociente entre las áreas. Aumenta el número de decimales para comprobar que estos valores coinciden.

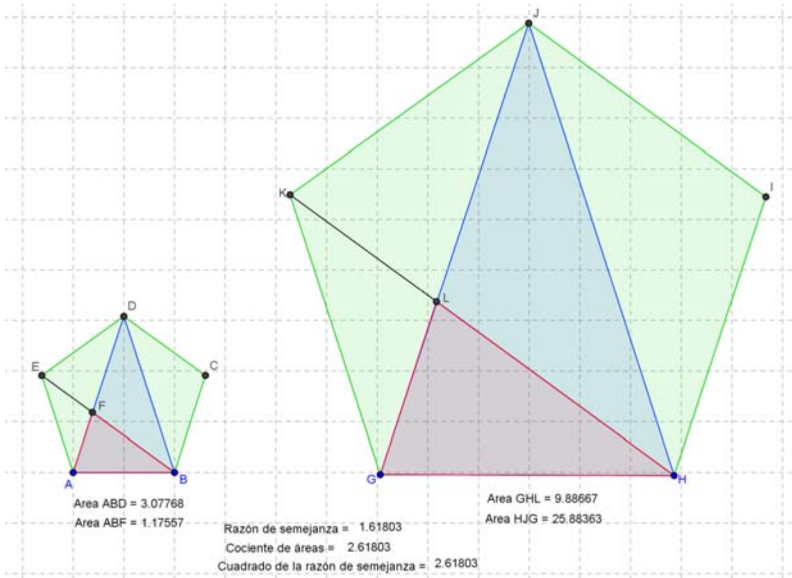
- Utiliza la herramienta **Área** para que aparezca en la pantalla gráfica el área de los triángulos *ABD* y *ABF*, e **Insertar texto** para que aparezcan los valores de la razón de semejanza, el cociente entre las áreas y el cuadrado de la razón de semejanza.

Actividades propuestas

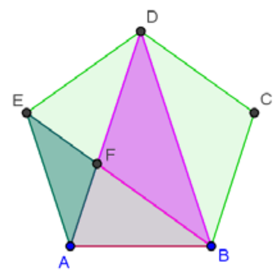
Comprueba estos resultados en otro pentágono

46. Dibuja un pentágono *GHIJK* del mismo modo que has construido el *ABCDE* con la condición de que la longitud de sus lados sea el triple del que ya está construido. Para facilitar la tarea puedes activar la **cuadrícula** y mover los puntos iniciales.

a) Calcula las áreas de los triángulos *HJG* y *GHL*, su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y el cuadrado de la razón de semejanza.

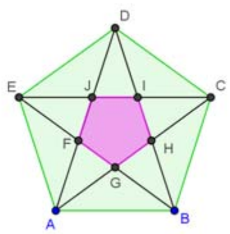


b) Comprueba que la razón de semejanza, el cociente entre las áreas y el cuadrado de la razón de semejanza de los triángulos *GHJ* y *GHL* del pentágono *GHIJK* coinciden con las de los triángulos *ABD* y *ABF* del pentágono *ABCDE.*

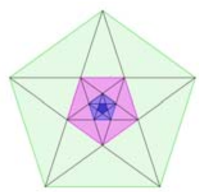


47. Calcula las áreas de los dos pentágonos y relaciona su cociente con el cuadrado de la razón de semejanza.

48. *Otros triángulos del pentágono.* Investiga si los triángulos *AFE* y *BDF* son semejantes y si lo son calcula su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y compara este resultado con el cuadrado de la razón de semejanza.



49. *Pentágono dentro de un pentágono.* Dibuja el pentágono *FGHIJ* que se forma en el pentágono *ABCDE* al trazar sus diagonales ambos son semejantes porque son polígonos regulares. Calcula la razón de semejanza y el cociente entre sus áreas. Observa los triángulos AGF y ABD ¿son semejantes?



50. Observa los pentágonos regulares de la figura ¿son todos semejantes? Te parece que el proceso de dibujar pentágonos dentro de pentágonos es infinito ¿Por qué? ¿Cuál es la sucesión de las razones de semejanza entre el pentágono mayor y cada uno de los siguientes?

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

4. GEOGEBRA PARA BACHILLERATO

4.1. Las cónicas

El enigma de la oreja de Dionisio

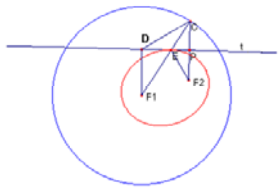
Hay lugares en el mundo que son conocidos por su especial acústica; son lugares en los que se produce una *focalización* de los sonidos, como la utilizada públicamente en los calabozos de *Siracusa* y que fue llamada "*oreja de Dionisio*". A ese punto llegaban todas las conversaciones, e incluso los cuchicheos de los presos a los oídos del tirano a través de un tubo escondido. *¿Qué explicación matemática tiene el enigma de la oreja de Dionisio?*

También, en la actualidad, cualquier cuchicheo en uno de los lados del antiguo hall del *Capitolio de Washington* se puede escuchar perfectamente en el lado opuesto. ¡Se cuenta que más de una vez se han conocido de este modo conversaciones confidenciales entre los diputados! *¿Conocéis más ejemplos similares en otros lugares?*

La *Catedral de Agrigento*, en *Sicilia*, puso en apuros a más de una persona. Su cúpula tiene la forma de un elipsoide de revolución, y cualquier susurro que se pronuncie en uno de sus focos se puede escuchar exactamente con la misma intensidad en el otro foco. ¡Y al poco de ser construida se descubrió que en uno de esos focos se había colocado un confesionario! Cuentan que lo descubrió un hombre que se lo pasaba en grande escuchando las confesiones, y que incluso invitaba a sus amigos a escucharlas, hasta que un día fue a confesarse su propia esposa, y no le gustó nada lo que oyeron él y sus amigos. *¿Tiene el mismo fundamento matemático que los casos anteriores?*

El enigma de la *Catedral de Agrigento*, del hall del *Capitolio de Washington*, y de la *oreja de Dionisio* se fundamenta matemáticamente en que en una elipse los rayos que pasan por un foco "rebotan" en la elipse y pasan por el otro foco. Si un susurro se produce en el foco F_1, lleve la dirección que lleve, al rebotar en la elipse va a parar al otro foco F_2 con intensidad suficiente como para que se pueda entender perfectamente lo que se ha dicho, mientras que a cualquier otro punto llega sólo el sonido que se dirige directamente hacia él y no se percibe lo suficiente.

Vamos a estudiar la explicación matemática de esta curiosa propiedad.



Traza una circunferencia de centro en F_1 y radio $r = 2a$, la longitud del eje mayor de la elipse. Toma un punto cualquiera E de la elipse y únelo con F_1 y con F_2. Por estar E en la elipse verifica que $F_1E + EF_2 = 2a$, por lo que si prolongamos F_1E hasta el punto C en la circunferencia, también tenemos que $2a = F_1E + EC$, por lo que $EC = EF_2$. Traza la mediatriz t del segmento CF_2.

¿Cómo podríamos demostrar que t, la mediatriz de CF_2, es la recta tangente a la elipse en el punto E? ¿Quién se atreve con una rigurosa demostración matemática?

La recta t, al pasar por E, ya corta en un punto a la elipse. Si probamos que sólo corta a la elipse en ese único punto entonces quedará probado que t es la recta tangente a la elipse por E. *¿Intentemos probarlo?*

Si tuviera otro punto de intersección D, verificaría que $F_1D + DC$ es igual a $2a$. Sin embargo se tiene $CD + DF_1 > CF_1 = 2a$

Una bola en una mesa de billar al pegar en una de las bandas rebota formando ángulos iguales de entrada y de salida con la banda. Y una onda sonora al chocar con la elipse se comporta de la misma

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

manera, y rebota como si la elipse fuese su recta tangente. *Estudiemos si los ángulos de entrada y de salida son iguales.*

Una onda sonora emitida desde F_1 hacia E rebotaría en t formando ángulos iguales de entrada y salida con t. *Observemos la figura y comprobemos que:*

- ✓ *El ángulo F_1ED es igual al ángulo CEP ¿Por qué?*
- ✓ *Y el ángulo CEP es igual al ángulo PEF_2 ¿por qué?*

Luego la onda sonora emitida desde F_1 rebota en E y pasa por F_2. ¡*Ya hemos resuelto el enigma*!

Actividad resuelta

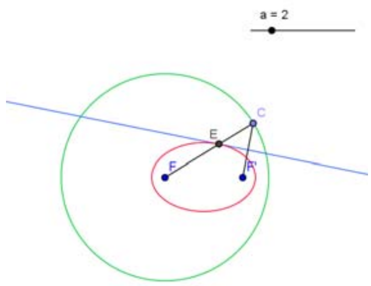
Construcción de elipses

La explicación del enigma anterior nos permite construir elipses simplemente doblando un papel, o utilizando *Geogebra* para hacer esos “doblados”.

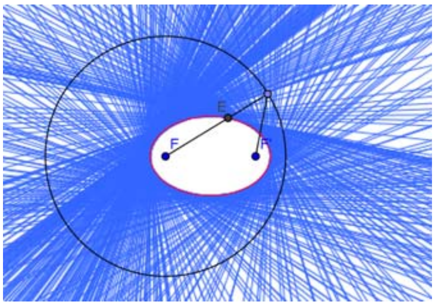
Imaginemos que tenemos en un papel únicamente dibujada la circunferencia y un punto, el foco F_2 de nuestra figura anterior, y que doblamos haciendo coincidir a F_2 con un punto cualquiera de la circunferencia, C. El doblez es la recta t, mediatriz del segmento F_2C y tangente a la elipse. Repetimos el proceso muchas veces haciendo muchos dobleces distintos. La elipse se va formando como envolvente de esas rectas tangentes.

Construcción de elipses e hipérbolas como envolventes

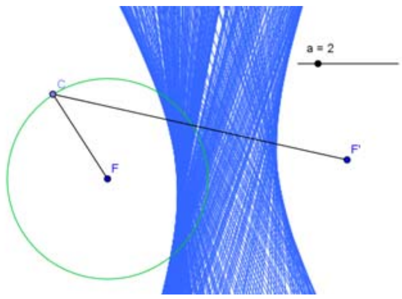
- *Repite el procedimiento anterior utilizando Geogebra.*



- Dibuja dos puntos F y $F’$, que van a ser los focos de la elipse que vamos a construir y construye un **deslizador**, d, en el intervalo [0, 10]
- Traza una **circunferencia** con centro en F y radio el deslizador, d, con un valor mayor que la distancia entre F y $F’$.
- Define un punto C de la circunferencia y traza los segmentos que unen este punto con F y $F’$.



- Con la herramienta **mediatriz** dibuja la mediatriz del segmento $CF’$ y define como E el **punto de intersección** de esta recta con el segmento CF.
- Dibuja el **lugar** geométrico que describe el punto E cuando C recorre la circunferencia. Activa **rastro** para el punto E, y observa que cuando el punto C recorre la circunferencia, el punto E describe la elipse.
- Activa **rastro** para la mediatriz y mueve con el **puntero** el punto C por la circunferencia, comprueba que la elipse es la envolvente de estas rectas mediatrices.



- Borra el **rastro** con la combinación de teclas **Control + F**
- Coloca con el **puntero** el punto $F’$ fuera de la circunferencia y mueve el punto C, comprueba que la envolvente de las mediatrices es una hipérbola.
- Desactiva **rastro** para la mediatriz y coloca el punto $F’$ dentro de la circunferencia.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

- Determina los segmentos FE y $F'E$, calcula sus longitudes, calcula su suma en la **línea de entrada** y observa que coincide con el radio de la circunferencia que es el valor del deslizador d. Comprueba que esta igualdad permanece al modificar el radio de la circunferencia.

Actividades propuestas

51. Si con el **puntero** se mueve el punto F' muy cerca de F, ¿cómo varía la forma de la elipse?, ¿y la de la hipérbola?

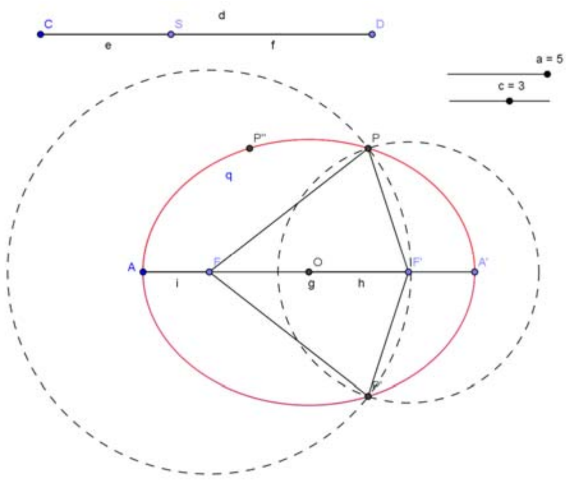
52. Modifica el radio de la circunferencia, con el deslizador haciéndola más grande o más pequeña. ¿Cómo influye en la elipse que se forma?, ¿y en la hipérbola?

53. Utiliza un procedimiento con *Geogebra* para dibujar la parábola como envolvente de las mediatrices de los segmentos que unen el foco con un punto de la directriz.

Construcción de hipérbolas y elipses a partir de su definición como lugar geométrico

Actividad resuelta

- *Construye una elipse a partir de su definición como lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.*



- Define dos deslizadores a y c con valores de 0 a 5.
- Dibuja un segmento CD de longitud 2*a, un punto S de este segmento, y los segmentos CS y SD.
- Determina un punto A y un segmento horizontal a partir de A de longitud d (CD), nombra $A´$ al otro extremo del segmento y calcula su punto medio O.
- Dibuja un segmento de longitud c a partir de O y otro a partir de A de longitud $a – c$, renómbralos F y F'.
- Dibuja una circunferencia de centro F y radio e (CS) y otra de centro F' y radio f (SD).
- Denomina P y P' a los puntos de intersección de las dos circunferencias. Dibuja los segmentos FP, FP', $F'P$ y $F'P'$.
- Activa **rastro** para los puntos P y P' y observa cómo se dibuja la elipse al mover el punto S por el segmento CD.
- Determina el **lugar geométrico** de los puntos P y P' cuando S recorre el segmento CD, queda dibujada la elipse.
- Dibuja la elipse con la herramienta **cónica**: Además de los cuatro puntos, A, A', P, P', se necesita otro punto por el que pase. Una estrategia puede ser determinar el simétrico del punto P' con respecto al punto medio, O, del segmento AA'.
- Determina una recta perpendicular al segmento AA' que pase por su punto medio O, los puntos B y

B' de intersección de esta recta con la cónica y los segmentos OB y OB'.

Parámetros de la elipse:

Ya sabes que:

La longitud del segmento OA se denomina *semieje mayor*, a, es la mitad de la distancia entre los dos puntos más alejados de la elipse.

La longitud del segmento OB se denomina el *semieje menor*, b, es la mitad de la distancia entre los dos puntos más cercanos de la elipse.

La longitud del segmento OF es la *semidistancia focal,* c, que es la mitad de la distancia entre los focos F y F'.

Si el punto O es el origen de coordenadas la ecuación de esta elipse es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Actividades propuestas

54. Investiga la relación entre los tres parámetros de la elipse a, b y c y justifícala matemáticamente.

55. Relaciona la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos, que es constante, con sus parámetros.

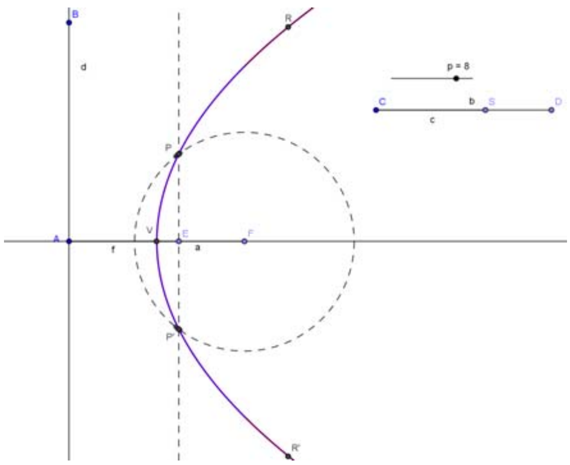
56. Dibuja una elipse con *Geogebra* que tenga por ecuación $144x^2+169y^2=24336$ y calcula los valores de sus parámetros: a, b, c.

57. Dibuja una hipérbola con *Geogebra* a partir de su definición, como lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Construcción de una parábola a partir de su definición como lugar geométrico

Actividad resuelta

- *Construye una parábola a partir de su definición como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz*.



- Define un deslizador p con valores de 0 a 10.
- Dibuja una **recta** vertical, que pasa por dos puntos A y B con la misma abscisa, renómbrala, d. Será la directriz.
- Determina a partir del punto A un **segmento** de longitud p, y nombra como F al otro extremo. Será el foco.
- Dibuja el eje de la parábola, e, trazando una **recta perpendicular** a la directriz que pase por F.
- Toma un segmento auxiliar, b, de longitud $p,$ extremos C y $D,$ y determina un punto S en este segmento.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

- Determina el segmento CS, c; y dibuja una **circunferencia** de centro F y radio c, un segmento AE de origen A y longitud c y una recta paralela a la directriz que pase por E.
- Los **puntos de intersección** entre esta recta y la circunferencia llamados P y $P´$ son puntos de la parábola ya que equidistan del foco F y de la directriz d.
- Dibuja la parábola activando **rastro** para los puntos de la parábola P y $P´$ y desplazar el punto S en el segmento CD.
- Determina los **lugares geométricos** de los puntos P y $P´$, con respecto al punto S del segmento CD.
- El vértice de la parábola V es el punto medio entre el foco F y el punto A de intersección del eje y la directriz.

Actividades propuestas

58. Investiga y describe un procedimiento para determinar otros dos puntos R y $R’$ de la parábola y dibújala con la herramienta **cónica** que pasa por los puntos $P, P’, V, R$ y $R’$

59. Indica cómo cambia la parábola al modifica el valor del parámetro p con el deslizador.

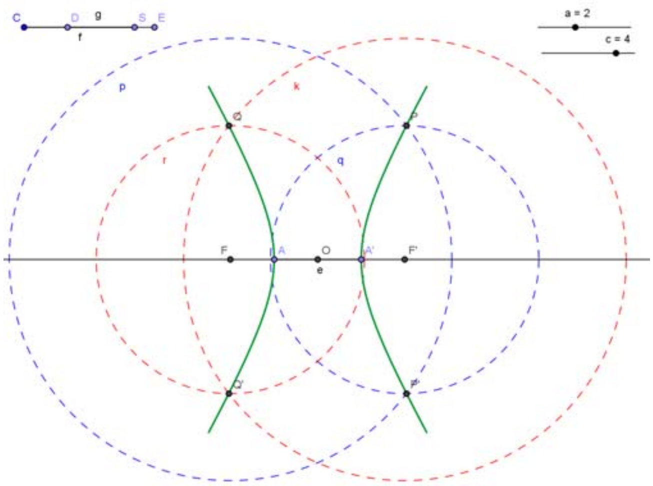
60. Visualiza los ejes de coordenadas y desplaza la parábola desplazando los puntos libres A y B hasta que V sea el origen de coordenadas, y el eje de la parábola, e, coincida con el eje de abscisas, pon el deslizador $p = 8$ y compara esta cónica con la que resulta al introducir en la *línea de entrada* la ecuación $y^2 = 16x$. Investiga la ecuación de esta parábola en función de p (distancia entre el foco y la directriz):

61. Dibuja la parábola de ecuación $x^2 = 4y$ e investiga las coordenadas de su foco y la ecuación de su directriz:

62. Utiliza *Geogebra* para resolver el siguiente problema: *Una escalera AB de 1 m de longitud tiene apoyado el extremo A en una pared y B en un suelo resbaladizo. Si en un punto de la escalera hay apoyado un gato y suponiendo que la pared y el suelo son perpendiculares. ¿Cuál es la trayectoria que describe el gato cuando la escalera se desliza hacia el suelo?*

Construcción de hipérbolas a partir de su definición como lugar geométrico.

Actividad resuelta



- *Construye una hipérbola a partir de su definición como lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.*

- Define dos deslizadores a y c con valores de 0 a 5.
- Determina un punto A, un segmento $AA’$ de longitud $2*a$, llama O al **punto medio** de este segmento y dibuja la recta que pasa por A y $A’$.
- Determina un segmento OF de longitud c y el

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

punto F' simétrico de F respecto al punto O. Los puntos F y F' son los focos.

- Dibuja un segmento auxiliar CD de longitud a, un segmento DE de longitud c y un punto S del segmento DE.
- Oculta el rótulo de los segmentos CD y DE y determina los segmentos CS y DS, nombrados f y g respectivamente, observa que la diferencia entre las longitudes de los segmentos f y g es a.
- Dibuja dos circunferencias con centro F de radios 2*f y 2*g y otras dos con centro F' con los mismos radios. Colorea de rojo la menor con centro en F y la mayor con centro F' y de azul las otras dos.
- Determina los cuatro **puntos de intersección**, P, P', R y R', entre cada una de las dos circunferencias que tienen distinto radio y el mismo color y el **lugar geométrico** de cada uno de estos puntos respecto al punto S cuando *se* desplaza por el segmento DE.
- Dibuja la hipérbola con la herramienta **cónica** señalando 5 de los puntos entre los 6 por los que sabemos que pasa, A, A', P, P', Q y Q'.

Parámetros de la hipérbola:

Ya sabes que:

La longitud del segmento OA se denomina *semieje real*, a, es la mitad de la distancia entre los dos puntos más cercanos de la hipérbola.

La longitud del segmento OF es la *semidistancia focal*, c, que es la mitad de la distancia entre los focos F y F'.

Hay otro parámetro de la elipse, el *semieje imaginario*, b, que aparece en la ecuación de la hipérbola y definido a partir de los parámetros a y c por la relación: $c^2 = a^2 + b^2$.

Si el punto O es el origen de coordenadas la ecuación de esta hipérbola es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Actividades propuestas

63. Relaciona la diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos, que es constante, con sus parámetros.

64. Dibuja una hipérbola centrada en el origen, dados sus focos y un punto y comprueba que sus puntos verifican la definición como lugar geométrico e investiga el valor de la constante.

65. Dibuja una hipérbola con *Geogebra* que tenga por ecuación $144x^2 - 169y^2 = 24336$, y calcula los valores de sus parámetros: a, c, b.

66. La excentricidad de una cónica, e, es el cociente $\frac{c}{a}$. Investiga la diferencia entre excentricidad de una elipse, una hipérbola y una parábola.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

4.2. Otros lugares geométricos. Cicloides, epicicloides e hipocicloides

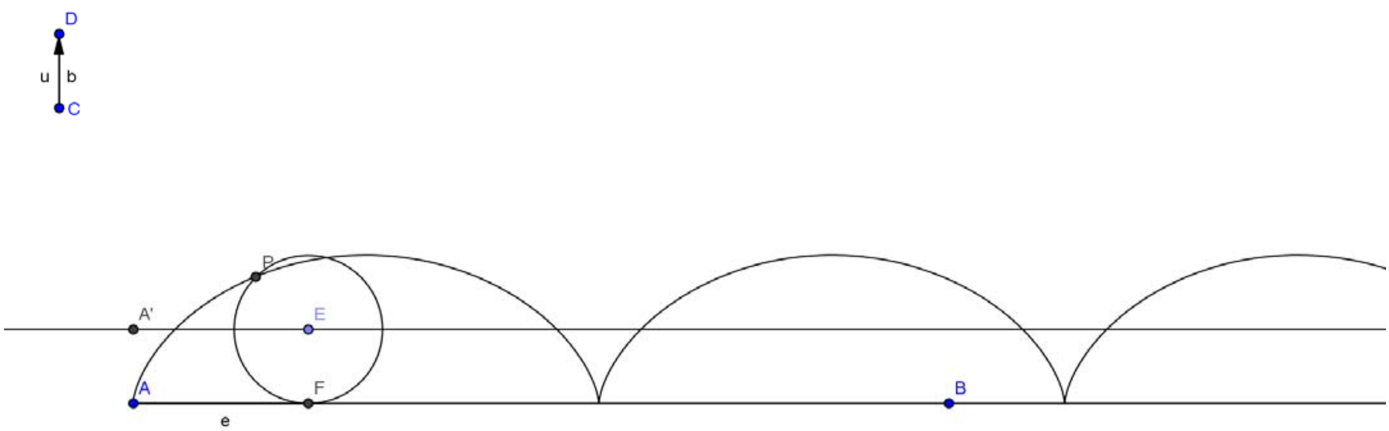
La cicloide

La cicloide es posiblemente la primera curva verdaderamente moderna, en el sentido de que no figura en las obras de Geometría de la antigua Grecia. *Galileo* fue uno de los primeros en estudiarla, le dio este nombre (1599) y se interesó por el cálculo de su área, pesando trozos de metal con forma de cicloide.

Un punto de una circunferencia que se desplaza horizontalmente sin rozamiento describe una cicloide. Es, por tanto, la curva que describe un punto de la rueda de un coche o de una bicicleta.

Utiliza el programa Geogebra para dibujar la cicloide como lugar geométrico.

- Dibuja una **semirrecta** horizontal, de origen un punto A, situado en la parte inferior izquierda de la pantalla y un punto B; un **segmento** vertical, b, en la parte superior**,** que va a ser la medida del radio de la circunferencia que va a rodar sobre esta semirrecta y un vector u sobre el segmento.
- Con la herramienta **traslada objeto por un vector**, determina el punto A', resultado de trasladar el punto A según el vector u, y dibuja una **recta paralela** a la semirrecta que pase por A'.
- Determina un **punto** E en esta recta y utilizando **compás** dibuja una **circunferencia**, de radio el segmento b y el punto E como centro.
- Dibuja el **punto de intersección** F entre la semirrecta y la circunferencia anterior y el segmento e que une los puntos A y F.
- Define en la línea de entrada el número **r=e*180/pi**, que equivale a pasar de radianes a grados la longitud del segmento e.
- Con la herramienta **Rota objeto en torno a un punto un ángulo dado**, determina el punto que resulta de girar el punto F con centro el punto E el ángulo de rº y renómbralo P.
- Dibuja el **lugar geométrico** del punto P respecto a E. La curva que aparece es la cicloide.

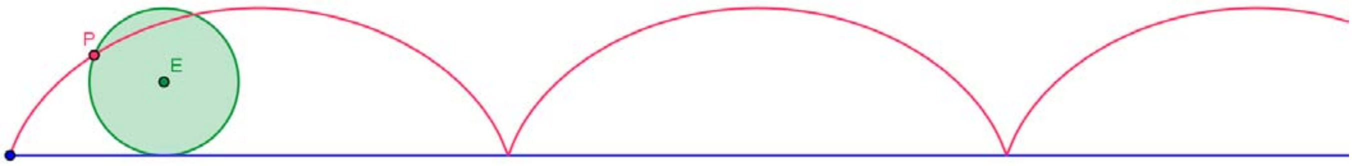


- Mueve con el **Puntero** el punto E en la recta, observa como el punto P recorre la cicloide.
- Activa en **Propiedades, Muestra rastro** para el punto P, observa como al rodar la circunferencia la

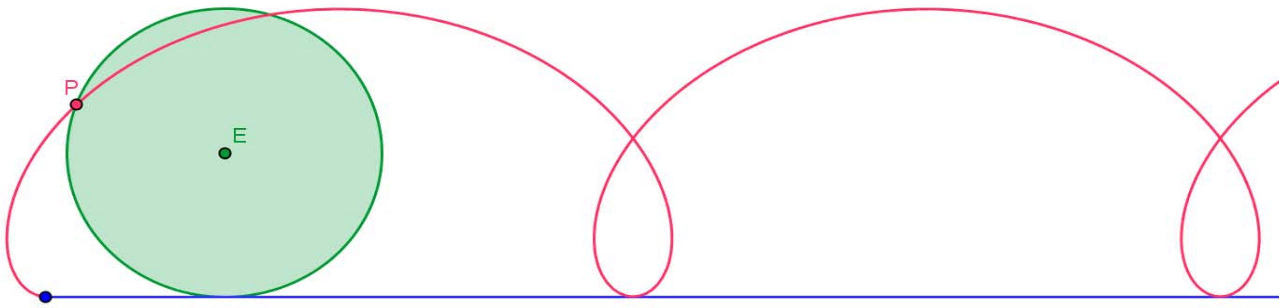
Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

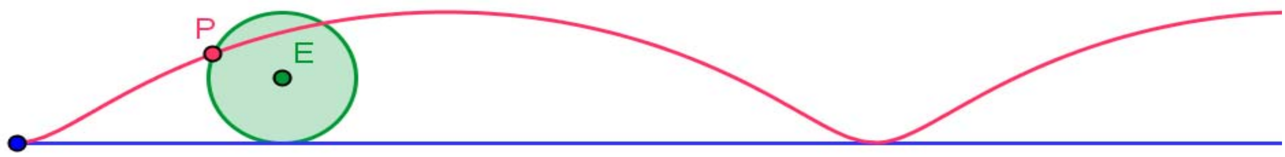
curva que describe el punto C es una cicloide. La traza se borra con la combinación de letras **CTRL+F**.

- Oculta los elementos auxiliares de la construcción, para dejar sólo, la semirrecta, el segmento b, la cicloide, el punto P que la genera, la circunferencia y su centro, el punto E. Coloréalos con distintos tonos y sombrea el círculo interior a la circunferencia.



- Modifica la longitud del segmento b, el radio de la circunferencia, y observa cómo se modifica la cicloide pasando a ser una cicloide alargada o una cicloide acortada.

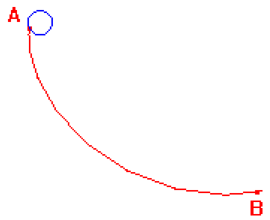




Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

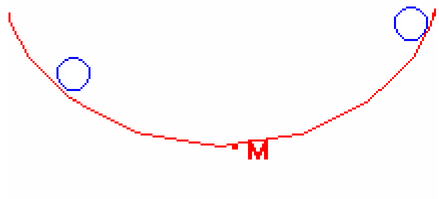
Propiedades de la cicloide:

El interés de la cicloide está centrado, en que es *braquistócrona*, es decir la curva que describe un móvil cuando se desplaza de un punto a otro, sin estar en vertical y bajo el efecto de la gravedad, del modo más rápido y *tautócrona* lo que significa que una partícula que se mueva sobre una cicloide, con los puntos cúspides hacia arriba, oscilará con un movimiento armónico simple y el periodo es independiente del punto de inicio.



La cicloide es ***braquistócrona***

Para pasar del punto A al punto B el trayecto más rápido es seguir un arco de cicloide



La cicloide es ***tautócrona***

Las dos bolas llegan a la vez al punto M.

Otras propiedades curiosas sobre esta curva es que la longitud de un arco de cicloide es 8 veces la longitud del radio de la circunferencia que la genera, que el área barrida por un arco de cicloide es 3 veces la del círculo generador y que es ***isócrona***, es decir, el periodo de un péndulo que describe una cicloide es siempre el mismo, no depende de la amplitud de la oscilación.

Actividades propuestas

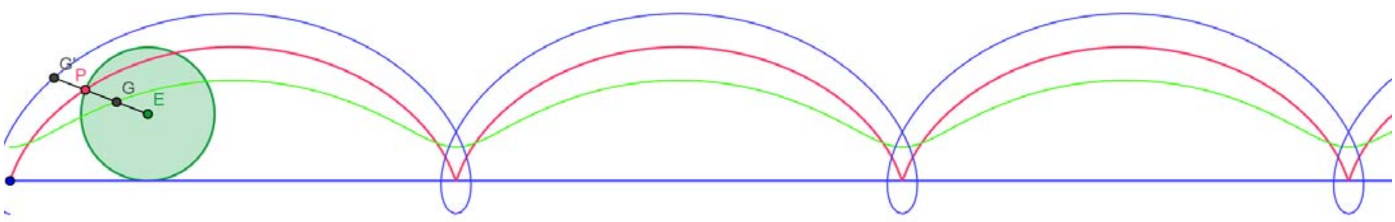
67. Determina dos puntos G y G', G interior y G' exterior a la circunferencia y que al rodar ésta sobre la semirrecta se muevan con ella. (Una forma fácil para determinar G y G' es que G sea el punto medio del segmento PE y G' el simétrico de G respecto al punto P).

68. Dibuja el **lugar geométrico** que describe el punto G interior de la circunferencia y que se desplaza con ella, es una cicloide acortada.

- Activa **Muestra rastro** para el punto G, mueve con el **Puntero** el punto E *y* observa la curva que recorre el punto G.

69. Traza el **lugar geométrico** que describe el punto G' exterior a la circunferencia y que se desplaza con ella, es una cicloide alargada.

- Activa **Muestra rastro** para el punto G', mueve con el **Puntero** el punto E y observa la curva que recorre el punto G'.



Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

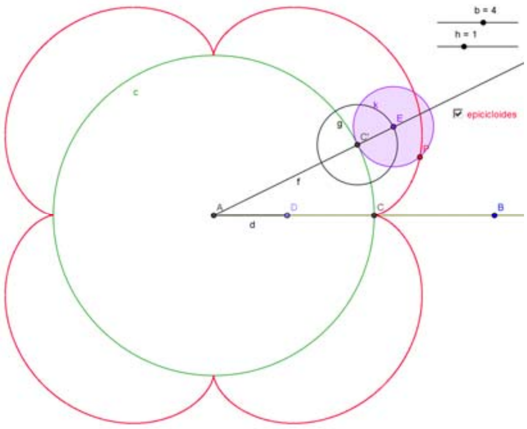
Epicicloides e hipocicloides

Una ***epicicloide*** es la curva que describe un punto de una circunferencia cuando esta rueda sin rozamiento sobre otra circunferencia fija.

Una ***hipocicloide*** es la curva que describe un punto de una circunferencia cuando esta rueda sin rozamiento en el interior otra circunferencia fija.

Utiliza el programa Geogebra para representar las curvas denominadas epicicloides.

- Dibuja una **semirrecta** horizontal, a, de origen un punto A, situado en la parte central de la pantalla y que pasa por un punto B a la derecha de A. Define un **deslizador**, b, con valores entre 0 y 7**,** que va a ser la medida del radio de la circunferencia que no rueda.
- Dibuja una **circunferencia** con centro el punto A y radio b (el deslizador), que será la circunferencia que no rueda, y el **punto de intersección,** C, entre la semirrecta y la circunferencia. Define un **punto** D de la semirrecta y el **segmento** AD, llámalo d.
- Define en la línea de entrada el número **e = d*180/(b*pi)**, que equivale a pasar de radianes a grados la longitud del segmento d / b.
- Con la herramienta **Rota objeto en torno a un punto un ángulo dado**, determina el punto C' que resulta de girar el punto C con centro el punto A el ángulo de e º en sentido contrario a las agujas del reloj.
- Define un **deslizador**, h, con valores entre 0 y 3**,** que va a ser la medida del radio de la circunferencia que rueda.
- Dibuja una **semirrecta**, de origen un punto A que pasa por un punto C', una **circunferencia** con centro C' y radio h (el nuevo deslizador), y el **punto de intersección,** E, entre esta semirrecta y esta circunferencia, más alejado de A.
- La **circunferencia** con centro en E que pasa por C', será la que rueda.
- Define en la línea de entrada el número **r = d*180/pi**, que equivale a pasar de radianes a grados la longitud del segmento d.
- Con la herramienta **Rota objeto en torno a un punto un ángulo dado**, determina el punto que resulta de girar el punto C' con centro el punto E el ángulo de r º en sentido contrario a las agujas del reloj, llámalo P.



- Dibuja el **lugar geométrico** que describe el punto P, cuando el punto D se desplaza en la semirrecta, a, la curva que aparece es una epicicloide.
- Mueve con el **Puntero** el punto D y observa como el punto P recorre la epicicloide. Para comprobarlo **Activa Rastro** para el punto P.
- Inserta la **casilla de control para ocultar objetos,** llámala *epicicloides* y selecciona para ocultar, el punto P, la epicicloide, la circunferencia que rueda y el punto E.
- Mueve el deslizador b que indica la medida del radio de la circunferencia que no se mueve y observa

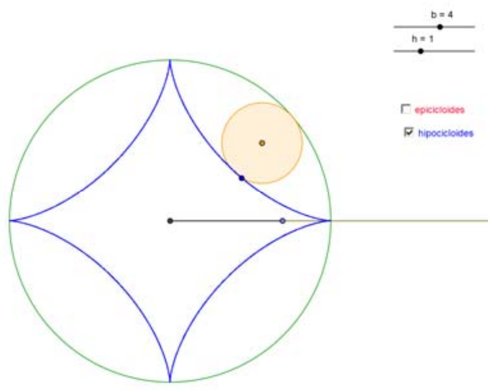
Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

las distintas epicicloides que aparecen.

Si llamamos k al cociente entre los radios, $k = \frac{b}{h}$, las epicicloides tienen nombres propios, por ejemplo si k = 1, la *epicicloide* obtenida se denomina *cardiode*.

- *Utiliza el programa Geogebra para representar las curvas denominadas hipocicloides.*

La construcción de las hipocicloides es muy similar a la anterior por lo que desactivamos la casilla de control que oculta los elementos característicos para dibujar las epicicloides y dejamos el resto que son comunes.



- Determina el **punto de intersección,** F, más cercano al punto A, entre la semirrecta que pasa por C' y la circunferencia con centro C' y radio h.
- La **circunferencia** con centro en F que pasa por C', será la que rueda por el interior.
- Con la herramienta **Rota objeto en torno a un punto un ángulo dado**, determina el punto que resulta de girar el punto C' con centro el punto F el ángulo de r º en sentido horario, llámalo Q.
- Dibuja el **lugar geométrico** que describe el punto Q, cuando el punto D se desplaza en la semirrecta, a, la curva que aparece es una hipocicloide.
- Mueve con el **Puntero** el punto D y observa como el punto Q recorre la hipocicloide. Para comprobarlo **Activa Rastro** para el punto Q.
- Inserta una **casilla de control para ocultar objetos,** llámala *hipocicloides* y selecciona para ocultar, el punto Q, la epicicloide, la circunferencia que rueda interiormente y el punto F.
- Mueve el deslizador b que indica la medida del radio de la circunferencia que no se mueve y observa las distintas hipocicloides que aparecen.
- Colorea los elementos para mejorar el aspecto de la construcción y oculta los elementos auxiliares para obtener las siguientes figuras.

Si llamamos k al cociente entre los radios, $k = \frac{b}{h}$, las *hipocicloides* tienen nombres propios, por ejemplo si k = 3, la hipocicloide se denomina *deltoide* y si k = 4 *astroide.*

Actividades propuestas

70. Determina un punto G interior a la circunferencia que rueda por el exterior de la circunferencia fija y que se desplace con ella. Una opción es tomar G como el punto medio del segmento entre el punto que rueda y el centro de la circunferencia rodante. Dibuja el **lugar geométrico** que describe el punto G, esta curva se denomina *epitrocoide.* Modifícala cambiando la razón entre los radios. Investiga estas curvas.

71. Determina un punto H interior a la circunferencia que rueda por el interior de la circunferencia fija y que se desplace con ella. Dibuja el **lugar geométrico** que describe el punto H, esta curva se denomina *hipotrocoide.* Modifícala cambiando la razón entre los radios. Investiga estas curvas.

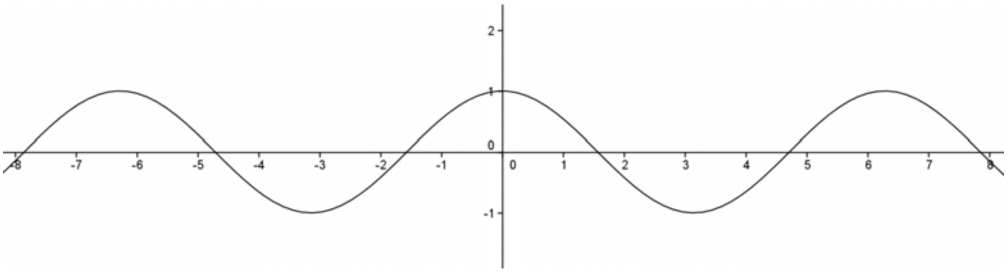
4.3. Funciones trigonométricas

En esta actividad se utiliza el programa *Geogebra* para representar funciones trigonométricas y relacionar la gráfica de una función y su expresión analítica, con la que se obtiene al realizar una traslación según un vector paralelo a uno de los ejes de coordenadas o al multipicar por un número la variable *x* o *f*(*x*).

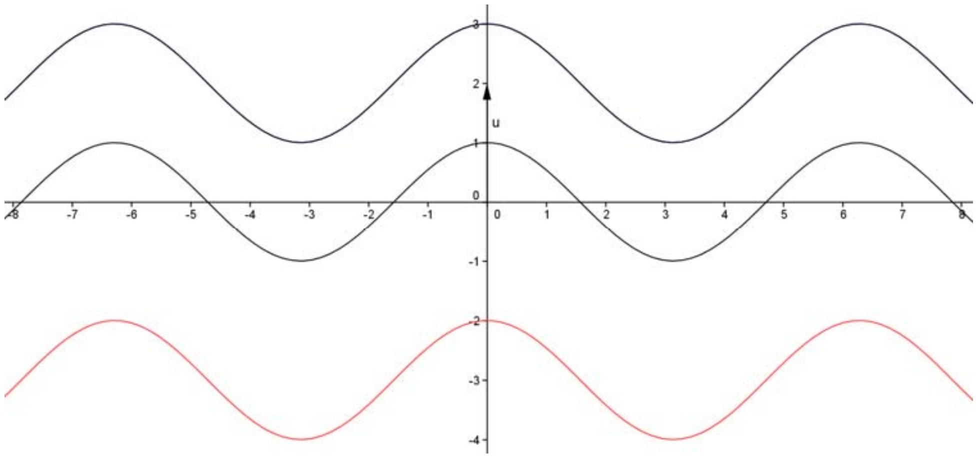
Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar la traslación de una función en la dirección del eje de ordenadas

- En la **línea de entrada**, introduce la función ***f*(*x*) = cos(*x*)**, queda definida la función *f*(*x*), como *cos*(*x*).



- Introduce en la **línea de entrada** la función ***f*(*x*) + 2**, observa que en la ventana algebraica aparece como *g*(*x*) = cos(*x*) + 2 y coloréala de azul.
- Define el vector *u* = (0, 2) y **traslada** la gráfica de *f*(*x*) respecto al vector *u,* observa que coincide con la gráfica de *g*(*x*).
- Introduce en la **línea de entrada** la función ***f*(*x*) − 3** y coloréala de rojo, observa que en la ventana algebraica aparece como *h*(*x*) = cos(*x*) − 3



La función ***y*** = ***f*(*x*) + *b*** es la trasladada de la función ***y*** = ***f*(*x*)** según el vector de traslación *u* = (0, *b*).

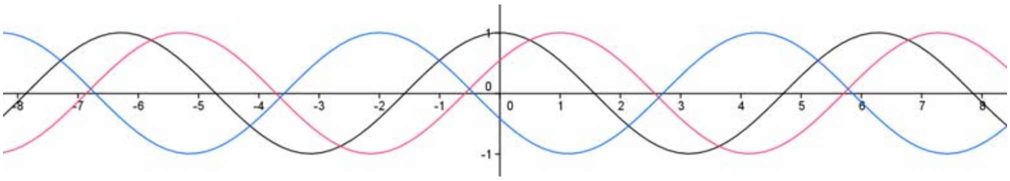
- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *traslación en la dirección del eje de ordenadas* y selecciona todos los elementos construidos salvo la función *f*(*x*) para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar la traslación de una función en la dirección del eje de abscisas.

- Introduce la **línea de entrada** la expresión ***f*(*x* – 1)** coloreándola de azul y ***f*(*x* + 2)** coloreada de rojo.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora



- Define el vector $v = (1, 0)$ y **traslada** la gráfica de $f(x)$ respecto al vector *v,* observa que coincide con la gráfica de $f(x - 1)$.

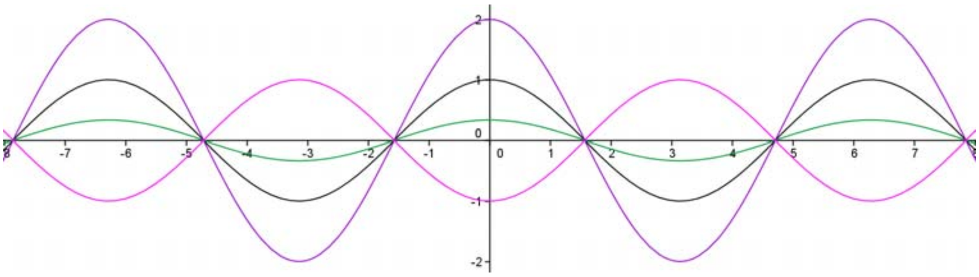
La función $\boldsymbol{y = f(x - a)}$ es la trasladada de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ según el vector de traslación $u = (a, 0)$.

- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *traslación en la dirección del eje de abscisas* y selecciona los últimos elementos construidos salvo la función $f(x)$ para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar las **gráficas de la funciones $\boldsymbol{kf(x)}$**

- En la **línea de entrada** introduce la expresión **(1/3)$\boldsymbol{f(x)}$** y coloréala de verde, introduce también **2$\boldsymbol{f(x)}$** pintándola violeta y **–$\boldsymbol{f(x)}$** dándole color rosa. Observa cómo se modifica la amplitud.



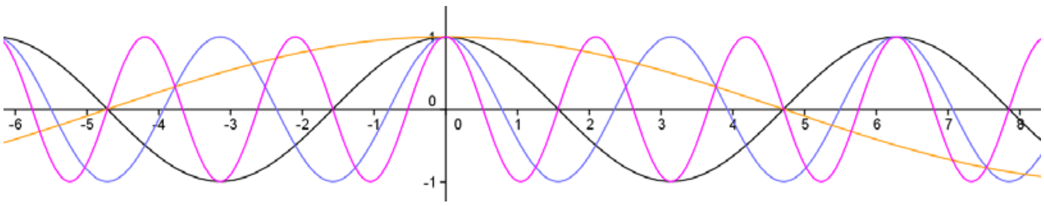
La función $\boldsymbol{y = kf(x)}$ modifica la amplitud la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ una cantidad igual al valor absoluto de $\boldsymbol{k}$. Si $\boldsymbol{k}$ es negativo se obtiene la función simétrica respecto del eje de abscisas.

- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *gráficas de las funciones kf(x)* y selecciona los últimos elementos construidos salvo la función $f(x)$ para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar las gráficas **de la funciones $\boldsymbol{f(kx)}$**

- Representa las funciones $\boldsymbol{f(2x)}$, $\boldsymbol{f(-3x)}$ y $\boldsymbol{f(x/3)}$ y píntalas con distintos colores.



- Observa como en esta ocasión se modifica el periodo y la frecuencia. Ya sabes que la función coseno tiene un periodo igual a 2π, algo más de 6, es decir, en 2π hace una oscilación completa. Comprueba que el periodo de $\boldsymbol{f(2x)}$ es la mitad, π. El periodo de $\boldsymbol{f(-3x)}$ es $\boldsymbol{2\pi/3}$, y el de $\boldsymbol{f(x/3)}$ es $\boldsymbol{6\pi}$.

- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *gráficas de las funciones f(kx)* y selecciona los últimos elementos construidos salvo la función $f(x)$ para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividades propuestas

72. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(x) + k$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- El signo de la constante *k:* ....

73. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(x + k)$ de la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- El signo de la constante *k*: ....

74. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $kf(x)$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- El signo de la constante *k*: ....

75. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(kx)$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- La constante *k*, su signo y que sea mayor o menor que 1: ....

76. Abre un nuevo archivo de *Geogebra*, represента la función tangente: $f(x) = \tan(x)$, estudia su comportamiento respecto a transformaciones de la forma $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$ y $f(kx)$ y busca alguna diferencia con la función $\cos(x)$ respecto a estas transformaciones.

77. Esboza, sin utilizar *Geogebra*, las gráficas de las funciones $f(x) = -\operatorname{sen}(x + 1)$, $g(x) = 2\cos(3x)$ y $h(x) = \operatorname{sen}(3x+2)$, calculando el período de cada una de ellas. Comprueba con *Geogebra* los resultados y justifícalos.

78. Dibuja en la pantalla de *Geogebra* la función seno, y su derivada, la función coseno. Comprueba cómo se verifican las propiedades que ya conoces sobre crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Comprueba que cuando la función seno alcanza un máximo o un mínimo, la función coseno se anula. Comprueba que cuando la función seno es creciente, la función coseno es positiva, y que cuando la función seno es decreciente, la función coseno es negativa.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

5. PRIMEROS PASOS CON LA HOJA DE CÁLCULO

Una hoja de cálculo es un programa que facilita el tratamiento de datos especialmente numéricos, que podemos modificar con fórmulas, organizados en forma de tabla.

Las hojas de cálculo son capaces de procesar una cantidad muy elevada de datos a gran velocidad, además de crear gráficos a partir de ellos.

En Matemáticas podemos utilizarlas para simular experimentos, confeccionar modelos, resolver problemas, controlar variables, representar datos mediante gráficos, etc.

5.1. La ventana de una hoja de cálculo

- **La barra de título**, **la barra de menús, las barras de herramientas y las barras de desplazamiento** son las de cualquier ventana de Windows así como los métodos para ocultarlas hacerlas visibles o personalizarlas.
- **La barra de fórmulas** está situada debajo de las barras de herramientas, en el primer recuadro está la **dirección de la celda activa**, y el último es **el área de edición** donde se introduce y edita la información de la celda activa entre ellos están los botones de **cancelación y validación** de la entrada actual, y el botón de **modificar fórmula** que además de introducir el símbolo **=** que precede a todas las fórmulas permite elegir una función de todas las que tiene la hoja de cálculo ordenadas alfabéticamente.
- **El área de trabajo** es una matriz rectangular de filas y columnas. Las columnas están etiquetadas de izquierda a derecha con letras desde la A hasta la Z, después desde AA hasta AZ y así sucesivamente hasta la columna IV, las filas están numeradas hacia abajo, etiquetadas con números. Los **encabezados** de las filas y de las columnas permiten seleccionar filas o columnas y el botón situado sobre la fila 1 y a la izquierda de la columna A se utiliza para seleccionar toda la hoja. La intersección de una fila con una columna la llamaremos **celda** y se la denomina por el nombre de su columna y el número de su fila, que es lo que vamos a llamar su **dirección**. El cuadro negro situado en la esquina inferior derecha de la celda seleccionada se denomina **controlador de relleno**.
- En la fila inferior aparece resaltada la **hoja** activa de las 3 posibles que tiene un **libro** que es el nombre de un archivo de la hoja de cálculo.
- **La barra de estado** situada en la parte inferior de la ventana nos muestra información: sobre lo que está haciendo la hoja de cálculo en ese momento.
- Para movernos por la hoja tenemos dos ascensores, uno horizontal y otro vertical.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

5.2. Operaciones generales

Introducir datos

La celda activa es aquella en la que está situado el cursor, aparece enmarcada por un rectángulo más grueso y su **dirección** aparece en la barra de fórmulas. La forma más rápida de activar una celda es hacer clic con el ratón sobre ella, para desplazarnos por la hoja podemos utilizar el teclado, las barras de desplazamiento o introducir la dirección de la celda que queremos activar con la opción **Ir a...** del menú de **Edición**

Para escribir un dato en una celda es suficiente activarla y escribir el dato, que aparece en la barra de fórmulas y en la celda activa. Para ejecutar la acción hay que pulsar la tecla <ENTRAR>, el botón de validación o desplazarnos a otra celda.

Los tipos de datos son: texto, números, fechas/hora y fórmulas.

- Los datos **tipo texto** aparecen por defecto alineados a la izquierda, si un número queremos que aparezca como texto debemos ponerle una comilla (') delante.
- Los **datos numéricos**, aparecen por defecto alineados a la derecha, son todos los dígitos de 0 a 9 y caracteres especiales como +, -, (,), /, %, $, E.
- Las **fórmulas** deben ir siempre precedida del signo =. Al poner el signo igual, la hoja entiende que queremos que calcule. Una fórmula está compuesta por datos, operadores y funciones:
  - Los **datos** pueden ser números, referencias a celdas, nombres de rangos definidos previamente y cuyos contenidos sean valores y funciones que son fórmulas predefinidas.
  - Los **operadores** pueden ser matemáticos (suma, resta, multiplicación, división, potencia y tanto por ciento) y lógicos (igual, menor, menor o igual, mayor, mayor o igual y distinto).
    - Al combinar fórmulas con varios operadores hemos de tener en cuenta la prioridad o jerarquía de operaciones que se asigna a cada uno de ellos y que si dos operadores tienen la misma prioridad operará evaluando la fórmula de izquierda a derecha.
    - El orden de prioridad es: 1º %,2º ^, 3º * y / , 4º + y -; 1º =, 2º <, 3º>, 4º <=, 5º>=, 6º <>
  - Las **funciones**: lógicas, estadísticas, financieras, matemáticas y trigonométricas, etc., se pueden buscar pulsando el botón de la barra de fórmulas.

Observaciones:

Un dato numérico con una longitud superior a la celda se muestra en notación científica, si seleccionamos un formato la celda se llenará con signos (#) para ver el contenido de la celda tal y como lo hemos escrito hay que ampliar el ancho de la columna que se puede hacer arrastrando con el ratón el lado izquierdo de la etiqueta de la columna.

Un dato de texto que supera la longitud de la celda se visualiza ocupando las celdas de la derecha cuando están vacías, al escribir en estas celdas se corta el dato ajustándose a la longitud de la celda y al aumentar el ancho de columna volvemos a visualizarlo. También podemos escribir el texto en varias líneas seleccionando en la barra de menús **Formato** y en la opción **Celdas** la pestaña **Alineación** en la que debemos activar **Ajustar texto**.

Modificar datos

Si queremos modificar un dato cuando estamos editándolo, es suficiente utilizar las teclas <Retroceso>

o <Spr> para eliminar caracteres a la izquierda o a la derecha respectivamente. Cuando queremos eliminar varios caracteres debemos seleccionar el texto que queremos borrar y presionar cualquiera de estas dos teclas.

Si el dato que queremos cambiar estaba escrito previamente hay que seleccionar la celda activa y colocar el cursor en el área de edición. Para seleccionar la celda es suficiente hacer *clic* con el ratón sobre ella o acceder mediante las teclas del cursor y para colocar el cursor en el área de edición podemos hacer clic con el ratón sobre esta área o presionar la tecla <F2>. Ambas tareas se pueden realizar con una sola operación que consiste en hacer *doble clic* con el ratón sobre la celda cuyo contenido queremos modificar.

Para introducir los cambios hay que hacer *clic* en el botón de validación o pulsar la tecla <ENTRAR>, para deshacer el cambio el botón de cancelación o la tecla <Esc>.

Borrar datos

Para eliminar el contenido de una celda o de un rango, hay que seleccionarlo, y a continuación se puede activar la opción **Borrar contenido** del menú contextual, pulsar la tecla <**Supr**> o utilizar la opción **Borrar** del menú de **Edición**.

El comando **Deshacer** del menú de **Edición** o de la barra de herramientas **Estándar** eliminan el efecto del último comando ejecutado y el comando **Rehacer** restablece la situación anterior. Si lo que queremos es deshacer múltiples acciones podemos utilizar la flecha que está a continuación del botón **Deshacer** esta opción elimina una acción y todas las anteriores, para restablecer la situación anterior podemos utilizar el botón **Rehacer** y la flecha que hay a su derecha en la barra de herramientas.

Operaciones con rangos

Un rango es un conjunto de celdas contiguas, con forma rectangular que puede abarcar desde una sola celda hasta la hoja completa, para denominar un rango que contiene más de una celda se utilizan las direcciones de celdas opuestas separadas por dos puntos es lo que llamaremos dirección de un rango.

Ejemplo: A2:C4 selecciona un rectángulo formado por las celdas A2, A3, A4, B2, B3, B4, C2, C3, C4.

Para trabajar con un rango podemos seleccionarlo directamente, teclear su dirección o utilizar un nombre previamente creado.

Selección de un rango

Para seleccionar un rango con el ratón es suficiente hacer *clic* en uno de los extremos del rectángulo y arrastrar hasta el vértice opuesto, de esta forma también podemos seleccionar celdas o rangos no contiguos manteniendo pulsada la tecla <Control>. Si lo que queremos es seleccionar una fila o una columna basta con hacer *clic* en su encabezado. Para seleccionar toda la hoja, en el botón de seleccionar todo. Un rango previamente definido con un nombre se puede seleccionar eligiéndolo con la flecha de la parte izquierda de la barra de fórmulas.

Para seleccionar un rango con el teclado hay que pulsar la tecla de mayúsculas y sin soltarla desplazarse con las teclas del cursor hasta que el rango aparezca coloreado.

Este comando es especialmente útil cuando el número de filas o columnas de la hoja de cálculo es muy grande y resulta tedioso desplazarse con el ratón o con las barras de desplazamiento. También podemos seleccionar un rango a través del menú **Edición** con el comando **Ir a**.

Referencias absolutas, relativas y mixtas

Cuando se copian o mueven fórmulas en una hoja de cálculo, no se hace una copia exacta de las mismas, lo que permanece es la relación existente entre las celdas que se copian o se mueven, es decir las fórmulas se adaptan de forma automática a la posición donde se han copiado, este tipo de referencia se denomina relativa.

A veces es necesario que el valor de una celda en una fórmula permanezca invariante para esto basta con poner antes de la letra de la columna y del número de la fila el signo $, es el tipo de referencia que denominamos absoluta.

Las referencias mixtas se utilizan cuando sólo queremos que permanezca invariante el número de la fila o el nombre de la columna, para conseguirlo basta con poner antes del número de la fila o de la letra de la columna el signo $.

Ejemplos:

- Si escribimos =A2+A3 en la celda B3 y arrastramos hacia abajo, en la celda B4 el ordenado habrá escrito =A3+A4.
- Si escribimos =A2+A3 en la celda B3 y arrastramos hacia la derecha, en la celda C3 el ordenado habrá escrito =B3+B4.
- Si escribimos =A$2+A3 en la celda B3 y arrastramos hacia abajo, en la celda B4 el ordenado habrá escrito =A$2+A4.
- Si escribimos =$A2+A3 en la celda B3 y arrastramos hacia la derecha, en la celda C3 el ordenado habrá escrito =$A2+B3.

Copiar y mover rangos

Para copiar dentro de una hoja de cálculo el contenido de unas determinadas celdas tenemos que seleccionar celdas que formen un rectángulo que es lo que se ha llamado **rango**. Una vez seleccionado un rango para copiarlo en otra parte de la hoja podemos utilizar las siguientes opciones:

a) Los comandos **Copiar** y **Pegar** del menú de **Edición,** de la barra de herramientas **Estándar** o con las opciones del **menú contextual**.

b) Colocar el puntero del ratón en el borde del rango seleccionado y cuando cambia a tipo flecha pulsar la tecla <Control> y no soltar el ratón hasta elegir el rango donde se quiera copiar.

c) Si las celdas que queremos copiar son contiguas podemos arrastrar el controlador de relleno de las celdas seleccionadas hasta ocupar el rango donde se deseen copiar.

Si lo que queremos es mover un rango el proceso es similar.

En el menú **Edición** el comando **Rellenar** con las opciones **Hacia abajo**, **Hacia la derecha**, **Hacia arriba** y **Hacia la izquierda** nos facilita copiar fórmulas y datos numéricos que queremos repetir y con la opción **Series** las de tipo lineal, geométrica, cronológica y autorrellenar.

5.3. Cálculo de la letra del NIF

Actividades resueltas

- *Vamos a utilizar una hoja de cálculo para obtener de forma automática la letra del NIF (Número de Identificación Fiscal) asociada al número que figura en el DNI (Documento Nacional de Identidad). Para ello debemos realizar la división entera del número de DNI entre 23 y buscar en la siguiente tabla la letra correspondiente al resto de esta división. Esta es la letra del NIF.*

Resto	Letra	Resto	Letra	Resto	Letra
0	T	8	P	16	Q
1	R	9	D	17	V
2	W	10	X	18	H
3	A	11	B	19	L
4	G	12	N	20	C
5	M	13	J	21	K
6	Y	14	Z	22	E
7	F	15	S		

- Abre una hoja de cálculo.
- En la celda **A1** escribe el título de la actividad: *CALCULO DE LA LETRA DEL NIF*
- En la celda **A7** escribe *Restos* y en **B7**, *Letras*
- Copia los datos de la tabla anterior en el rango **A8:B30**, para ello introduce *0* en **A8**, *1* en **A9** y rellena en serie hasta **A30**. Para cada uno de estos valores que son los posibles restos de dividir el número del DNI entre 23 escribe en la misma fila y en la columna B la letra asociada a cada resto determinada en la tabla anterior.
- En la celda **B3** escribe *Introduce el DNI***,** en B4 escribe *Resto de la división* y en B5, *Letra*
- Reserva la celda **D3** para introducir el número del DNI: En el menú **Formato** y **Celdas** elige **Borde.**
- En la celda **D4** escribe la fórmula: **=Residuo(D3;23).** Con esta función se obtiene el resto de la división entera del número del DNI, que está en la celda D3, entre 23.
- En la celda **D5** introduce la fórmula: **=BUSCARV(D4;A8:B30;2)**

Esta función busca el valor que hay en la celda D4, en la que hemos calculado el resto, en el rango de datos A8:B30 y le asocia la letra correspondiente de la columna B8:B30.

- Copia el valor de la celda D5 en E3 para que aparezca la letra del NIF a continuación del DNI, para lo que es suficiente escribir en la celda E3 la fórmula =**D5**.

CÁLCULO DE LA LETRA DEL NIF

Introduce el DNI	36402358
Resto de la división	5
Letra	M

Restos	*Letras*
0	T
1	R
2	W
3	A
4	G
5	M
6	Y
7	F
8	P
9	D
10	X
11	B
12	N
13	J
14	Z

Actividades propuestas

79. Calcula la letra del NIF para los siguientes números del DNI a) 36202471; b) 47423243; c) 12345678

80. Pregunta en casa a tus padres y a tus hermanos su número de DNI y comprueba que eres capáz de adivinar la letra de su NIF.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

6. HOJA DE CÁLCULO PARA 1º Y 2º DE ESO

6.1. Número perfecto

En esta actividad se utiliza la *Hoja de cálculo* para calcular los divisores de un número, así se comprueba si un número es *perfecto* y si dos números son *amigos*.

Un número es ***perfecto*** cuando la suma de sus divisores propios coincide con él.

Actividad resuelta

- *Calcula la suma de los divisores propios del número* 28.

- Las 4 primeras filas se utilizan para poner el título, lo que indican *N* y *d* así como para introducir el número del que se quieren calcular los divisores, en este caso 28, que ocupa la celda B3.
- En las columnas A, B, C y D de la fila 6 se introducen los títulos de los cálculos que se van a realizar en la tabla del rango **A8:D34**.
- En la columna A de la tabla, se introducen los posibles divisores: En la celda A8 el número 1 y se **rellena en serie** hasta llegar al número 27.
- En la columna B se obtienen los distintos cocientes de dividir el número que está en la celda B3, en este caso 28, entre sus posibles divisores de la columna A**,** para que al copiar la fórmula de la celda B8 con el controlador de relleno no varíe el valor de la celda B3 hay que poner el símbolo $ antes de B y de 3.
- La fórmula que hay que introducir en la celda **B8** es **=$B$3/A8** y copiarla con el controlador de relleno en el rango **B9:B34.** Observa que algunos de estos cocientes son números enteros y otros no.
- En la columna C aparece la parte entera de los valores de la columna B. la fórmula que hay que introducir en la celda **C8** es **=Entero(B8)**, y se copia con el controlador de relleno en el rango **C9:C34**.
- En la columna D aparecen los divisores del número de la celda B3, para que un número de la columna A sea un divisor de N, los valores de su fila en las columnas B y C tienen que coincidir. Obtener estos valores se puede conseguir con el operador lógico **SI**.

Números Perfectos

Número N:	28
d:	*Posibles divisores de N*

d	*N/d*	*Entero(N/d)*	*Divisores*
1	28	28	1
2	14	14	2
3	9,3333	9	
4	7	7	4
5	5,6	5	
6	4,6667	4	
7	4	4	7
8	3,5	3	
9	3,1111	3	
10	2,8	2	
11	2,5455	2	
12	2,3333	2	
13	2,1538	2	
14	2	2	14
15	1,8667	1	
16	1,75	1	
17	1,6471	1	

- La fórmula que hay que introducir en **D8** es **=SI(B8=C8;A8;“”)** y se copia con el controlador de relleno en el rango **D9:D34**.

Ya tenemos calculados los divisores de 28, que son 1, 2, 4, 7 y 14. Para calcular los de otro número, los introducimos en la celda B3, y modificamos el rango de cálculo.

- Para calcular la suma de los divisores: En la celda **B35** introduce el texto *Suma de divisores* y en **D35** la fórmula **=SUMA(D8:D34)**. Si el resultado de esta suma coincide con el número de la celda **B3**, este número es perfecto.

Actividades propuestas

81. Elige un número cualquiera y modifica la hoja de cálculo para determinar si es perfecto.

82. No es fácil encontrar números perfectos, otro número perfecto es 496.

Mejora el procedimiento

Actividad resuelta

La *hoja de cálculo* anterior se puede mejorar probando menos valores como posibles divisores del número que queremos determinar si es o no perfecto.

- Se puede obviar el divisor *d* = 1 porque todo número es divisible por 1.
- Para calcular los divisores de un número *N* basta con probar los que son menores o iguales que la raíz de *N*, teniendo en cuenta que si encontramos un divisor, *d*, del número *N* menor que su raíz existe otro mayor que es el resultado de dividir *N* entre *d*.

Números Perfectos

Número N:	496	Raíz de N :	22,271	
d:	Posibles divisores de raíz de N			
d	N/d	Entero(N/d)	Divisores	Divisores
2	248	248	2	248
3	165,333	165		
4	124	124	4	124
5	99,200	99		
6	82,667	82		
7	70,857	70		
8	62	62	8	62
9	55,111	55		
10	49,600	49		
11	45,091	45		
12	41,333	41		
13	38,154	38		
14	35,429	35		

- En una nueva hoja de cálculo del mismo libro se copia el rango **A1:D12** del anterior.
- En **C3** se escribe *Raíz de N* y en **D3** la fórmula **=RAIZ(B3).**
- En **B4** se cambia *el texto.*
- Se elimina la fila 8 en la que se prueba que 1 es divisor de 28, con **Eliminar** del menú **Edición**.
- En **E6** se escribe *Divisores* y en **E8** la fórmula = **=SI(B8=C8;B8;””).**
- En **B13** y **B14** se escriben los textos que aparecen.
- En la celda **E13** se introduce la fórmula **=SUMA(D8:E11)** y en **E14**, la fórmula **=E13+1**

Se ha probado que el número 28 es perfecto utilizando sólo los divisores de números menores o iguales a 5, la parte entera de su raíz cuadrada.

Actividades propuestas

83. Utiliza este procedimiento para comprobar que el número 496 es perfecto:

Números Perfectos

Número N:	496	*Raíz de N :*	22,271
d:	*Posibles divisores de raíz de N*		

d	*N/d*	*Entero(N/d)*	*Divisores*	*Divisores*
2	248	248	2	248
3	165,333	165		
4	124	124	4	124
5	99,200	99		
6	82,667	82		
7	70,857	70		
8	62	62	8	62
9	55,111	55		
10	49,600	49		
11	45,091	45		
12	41,333	41		
13	38,154	38		
14	35,429	35		
15	33,067	33		
16	31	31	16	31
17	29,176	29		
18	27,556	27		
19	26,105	26		
20	24,800	24		
21	23,619	23		
22	22,545	22		

	Suma de divisores menos 1:	495
	Suma de divisores de N:	496

6.2. Números amigos

Dos números son ***amigos*** si uno de ellos es la suma de los divisores propios del otro y éste coincide con la suma de los divisores propios del primero

- ✓ ¿Cómo hay que modificar la hoja de cálculo anterior para determinar si dos números son amigos?

Actividad resuelta

- *Comprueba que* 284 *y* 220 *números son amigos*

En una nueva hoja de cálculo se copian los textos y las fórmulas que coinciden con la hoja anterior para demostrar que 284 y 220 son números amigos.

Números amigos

Número N:	284	*Raíz de N:*	16,852		*Número N':*	220	*Raíz de N':*	14,832	
d:	*Posibles divisores*				*d':*	*Posibles divisores*			
d	*N/d*	*Entero(N/d)*	*Divisores*	*Divisores*	*d'*	*N'/d'*	*Entero(N'/d')*	*Divisores*	*Divisores*
2	142	142	2	142	2	110	110	2	110
3	94,667	94			3	73,333	73		
4	71	71	4	71	4	55	55	4	55
5	56,8	56			5	44	44	5	44
6	47,333	47			6	36,667	36		
7	40,571	40			7	31,429	31		
8	35,5	35			8	27,5	27		
9	31,556	31			9	24,444	24		

Actividades propuestas

84. Elige dos números cualesquiera y modifica la hoja de cálculo para determinar si son amigos.

85. No es fácil encontrar números amigos, los cuatro siguientes pares son: (1184; 1210), (2620; 2924), (5020; 5564) y (6232; 6368),

6.3. Construcción de números perfectos. Números primos

Euclides (siglo III a.n.e.) demostró que si $2^p - 1$ es un número primo, entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es un número perfecto. Los números primos generados por la fórmula $2^p - 1$ se los conoce como números primos de *Mersenne* en honor a *Marin Mersenne* (siglo XVII) que estudió los números perfectos.

Posteriormente, *Euler* (siglo XVIII) demostró que todos los números perfectos pares se generan a partir de la fórmula que ya descubrió *Euclides*. En la actualidad no se conoce la existencia de números perfectos impares pero no se ha demostrado que los números perfectos deban ser pares.

La proposición de Euclides

La proposición 36 del libro IX de los Elementos de Euclides dice:

Si colocamos los números que queramos comenzando desde una unidad en proporción doble de forma continuada, hasta que su suma sea un primo, el producto de esa suma por el número final de la suma, es un número perfecto.

Así se conocieron en la antigüedad los cuatro primeros números perfectos:

1 + 2 = 3; 3 · 2 = **6**; 1 + 2 + 4 = 7, 7 · 4 = **28**. 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, 31 · 16 = **496**;

1 + 2 + 4 + 8 +16 + 32 + 64 = 127, 127 · 64 = **8128**.

Una demostración de esta proposición con notación matemática actual sería:

Utilizando la fórmula de la suma de p términos de una progresión geométrica:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1$$

Ya que $2^p - 1$ es primo, los divisores propios de $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ son:

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}, (2^p - 1)\cdot 1, (2^p - 1)\cdot 2, (2^p - 1)\cdot 2^2, \ldots, (2^p - 1)\cdot 2^{p-2} \text{ y su suma:}$$

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1} + (2^p - 1)\cdot(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-2}), \text{ calculando las sumas:}$$

$$(2^p - 1) + (2^p - 1)\cdot(2^{p-1} - 1) = (2^p - 1)\cdot(1 + (2^{p-1} - 1)) = (2^p - 1)\cdot 2^{p-1}$$

Por lo que queda demostrado que $(2^p - 1)\cdot 2^{p-1}$ es un número perfecto.

Actividad resuelta

- *Construcción de números perfectos utilizando una hoja de cálculo.*

La fórmula de *Euclides* permite encontrar números perfectos con números primos de la forma $2^p - 1$. Para que un número de esta forma sea primo es necesario aunque no suficiente que p sea primo, es decir, si p no es primo tampoco es primo $2^p - 1$, pero si p es primo el número $2^p - 1$ unas veces es primo y otras no.

	Números de Mersenne	Números perfectos
Valores de p	2^p -1	2^{p-1} (2^p - 1)
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8128
11	2047	2096128
13	8191	33550336
17	131071	8589869056
19	524287	137438691328
23	8388607	35184367894528

- En una hoja de cálculo introducimos valores de p primos, por ejemplo, desde 2 hasta 23.
- En la siguiente columna introducimos una fórmula que calcule $2^p - 1$ para cada valor de p de la

columna anterior.

- Por último en la siguiente columna introducimos una fórmula para calcular el valor de 2^{p-1} (2^p - 1) y así obtener los posibles números perfectos.
- Es posible que sea necesario cambiar el formato de las celdas para los números que aparezcan en notación científica o aumentar el ancho de columna si aparece (##########).

Actividad resuelta

- *Comprueba si* 2047 *es primo usando la hoja de cálculo*

La criptografía es la ciencia de alterar un mensaje para que sólo lo conozcan el emisor y el receptor, muchos métodos de criptografía moderna funcionan utilizando números primos muy grandes. Se basan en la dificultad que existe para factorizar un número como producto de dos primos. Es fácil, con los ordenadores de hoy en día, multiplicar dos números primos muy grandes para conseguir un número compuesto, pero es muy difícil la operación inversa.

En la actualidad, con el desarrollo de la informática, es menos complicado determinar que un número muy grande es primo, los mayores encontrados son de la forma $2^p - 1$, con *p* primo, además con estos números, cuando son primos, obtenemos números perfectos.

Se va a utilizar la hoja de cálculo para determinar si un número no muy grande es primo.

Comenzamos con $2047 = 2^{11} - 1$.

Para determinar que un número es primo es suficiente comprobar que no tiene por divisores, números primos, menores que su raíz cuadrada.

	Número: N	Raíz de N	
	2047	45,2437841	
d	Cociente	Parte entera	¿Es primo?
3	682,333333	682	0
5	409,4	409	0
7	292,428571	292	0
9	227,444444	227	0
11	186,090909	186	0
13	157,461538	157	0
15	136,466667	136	0
17	120,411765	120	0
19	107,736842	107	0
21	97,4761905	97	0
23	89	89	1
25	81,88	81	0
27	75,8148148	75	0
29	70,5862069	70	0
31	66,0322581	66	0
33	62,030303	62	0
35	58,4857143	58	0
37	55,3243243	55	0
39	52,4871795	52	0
41	49,9268293	49	0
43	47,6046512	47	0

- En la fila 4 escribe el número 2047 y en la misma fila y en la columna de la derecha una fórmula que utilizando la función **Raíz** calcula la raíz cuadrada de este número.
- En la primera columna de la tabla introduce posibles divisores del número, aunque basta con introducir los números primos es más rápido comprobar los números impares comenzando con 3 y **rellenando en serie** con incremento 2 hasta 45 (o hasta 43 que es primo).
- En la siguiente columna introduce una fórmula para calcular el cociente entre el número 2047, identificado por su celda con referencias absolutas, y la celda que ocupa el divisor 3 y copia la fórmula con el controlador de relleno hasta el divisor 43.
- Calcula la parte entera de los cocientes de la columna anterior con una fórmula que utilice la función

Entero.

- En la cuarta columna de la tabla se introduce una fórmula con la función lógica **SI** que devuelve 1 si los valores de las dos columnas anteriores de la misma fila son iguales y 0 en caso contrario. Esta fórmula permite encontrar, si existen, los divisores del número 2047 que en este caso son 23 y 89.

El número 2047 = $2^{11} - 1$ no es primo.

El resultado de *Euler* nos asegura que el número 2096128 = $2^{10}(2^{11} - 1)$ no es perfecto.

Actividades propuestas

86. Utiliza la hoja de cálculo y el procedimiento anterior, para determinar si los números 8191, 131 071, 524 287 y 8 388 607 son o no números primos.

87. El resultado obtenido establece si los números 33550336, 8589869056, 137438691328, 35184367894528 son o no números perfectos.

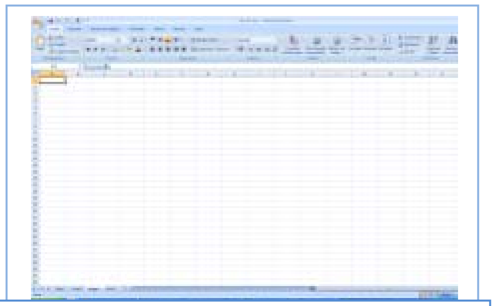
6.4. El ordenador y la estadística en 1º de ESO

El ordenador puede ayudar mucho en los cálculos estadísticos. Hay muchos programas para ello. En particular son fáciles de usar las **hojas de cálculo**. Vamos a resolver un problema utilizando una de ellas.

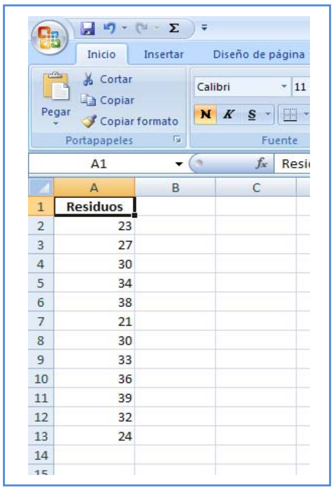
Actividad resuelta

- *Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización:*

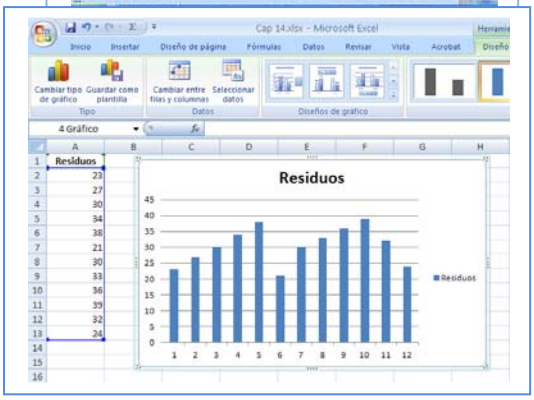
  23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.



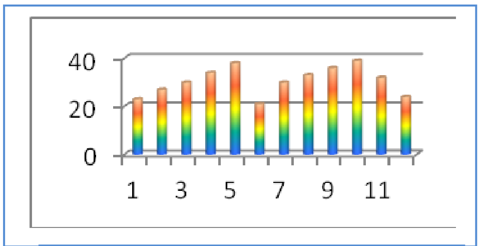
Queremos utilizar el ordenador para dibuja las representaciones gráficas de estos datos.
Abrimos una *hoja de cálculo*.
Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. En la casilla A1 escribimos "Residuos", y en las casillas A2, …, A13 copiamos los datos.



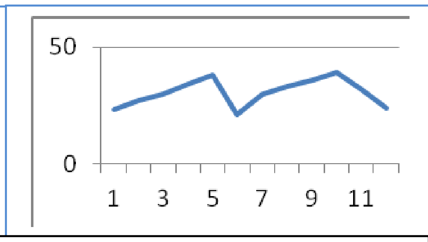
Para dibujar las gráficas se utiliza en Menú: Insertar.
En el menú *Insertar*, en *Gráficos*, desarrolla *Columnas*, elegimos Columna en 2 D, y obtenemos el diagrama de **barras** de la figura.
Podíamos haber elegido "Columnas en 3D", "Cilíndrico", "Cónico", "Pirámide", o modificar el color, añadir o quitar rótulos…



Vemos un diagrama de barras cilíndrico en varios colores.

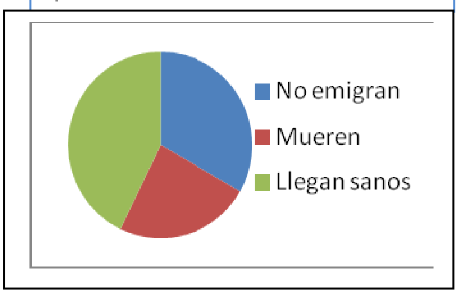


Ahora queremos representar un diagrama de **líneas** con los mismos datos. Volvemos al menú: Insertar, seleccionamos "Línea" y de nuevo tenemos varias opciones. Seleccionamos en nuestra hoja los datos, desde A2 hasta A13, y marcamos la primara línea 2D, y obtenemos:



Para hacer un diagrama de **sectores** hemos tomado datos sobre emigrantes africanos. Seleccionamos los datos, y en el menú Insertar simplemente elegimos "Circular" gráfico 2D, y ya obtenemos un gráfico de sectores.

	Datos %
No emigran	35
Mueren	25
Llegan sanos	45



Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

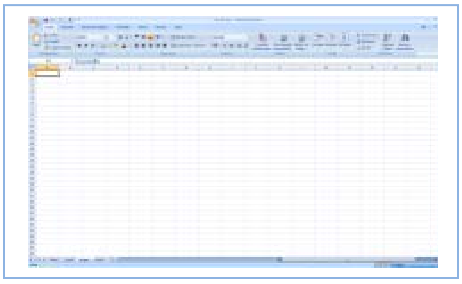
6.5. El ordenador y la estadística en 2º ESO

El ordenador puede ayudar mucho en los cálculos estadísticos. Hay muchos programas para ello. En particular son fáciles de usar las hojas de cálculo. Vamos a resolver un problema utilizando una de ellas.

Actividad resuelta

- *Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización:*

23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.

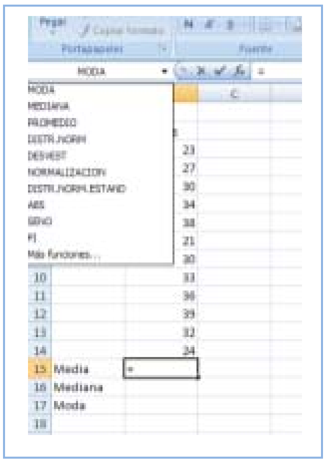


Para calcular la **media**, la **mediana** o la moda, abrimos la hoja de cálculo. Consta de filas indicadas por las letras A, B, C… y columnas indicadas por los números 1, 2, 3… cada casilla se identifica por su columna y su fila, por ejemplo, A1 es la primera casilla.

Escribimos los datos que nos han dado en la columna B a partir de la fila 3, dejando la primera columna y las dos primeras filas para poner títulos.

Escribimos en B2: Residuos; en A15: Media; en A16: Mediana; y en A17: Moda.

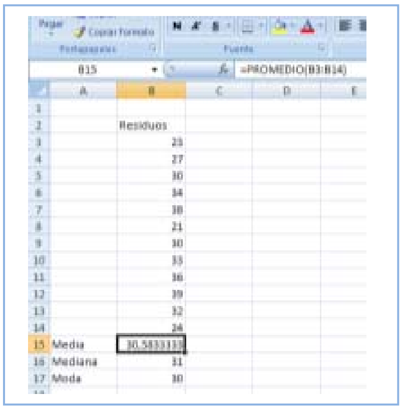
Nos colocamos sobre la casilla B15. En la ventana *fx* escribimos el signo igual: **=**, y desplegamos las funciones de la lista de la izquierda. Nos interesan: PROMEDIO (que es la media), MEDIANA y MODA.



Escribimos en la casilla B15:

=PROMEDIO(B3:B14),

y obtenemos la media que es 30,58.



Observa lo que esa expresión significa. Estás diciendo al ordenador que calcule la media (promedio) de los datos que están entre la casilla B3 y la casilla B14.

Para calcula la mediana nos colocamos en la casilla B16 y escribimos:

=MEDIANA(B3:B14),

y para calcular la moda nos colocamos en B17 y escribimos: =MODA(B3:B14).

Hemos obtenido que la mediana es 31 y la moda es 30.

Puedes investigar la cantidad de funciones que tiene el ordenador que también calcula (y que aún no conoces), desviación típica, coeficiente de curtosis, valor mínimo, valor máximo, cuartil…

También dibuja gráficas con facilidad. Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. Pero si desarrollas el menú de "*Insertar*" puedes ver los tipos de gráficas que puedes dibujar: de *columna*, *línea*, *circular*, *barra*, *dispersión*…

Hemos dibujado un diagrama de rectángulos seleccionado los datos e insertando un gráfico de columnas.

- Juega con el ordenador. Inserta otros gráficos distintos de columna, de línea, circular, barra, dispersión e indica a qué tipo de representación corresponden.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

7. HOJA DE CÁLCULO PARA 3º Y 4º DE ESO

7.1. Algoritmo de Euclides

El **algoritmo de Euclides,** descrito en los *Elementos*, es un método para calcular el máximo común divisor.

Para calcular el máximo común divisor (MCD) de dos números naturales a y b ($a > b$), se realiza la división entera de a entre b y se obtiene un cociente q_1 y un resto r_1.

- Si la división es exacta, es decir, $r_1 = 0$, entonces el MCD(a, b) = b.
- Si la división no es exacta, es decir, $r_1 \neq 0$, se divide b entre r_1, se obtiene un resto r_2. Si la división es exacta, $r_2 = 0$, entonces el MCD(a, b) = r_1, sino se repite el proceso hasta encontrar una división exacta.
- El máximo común divisor de a y b es el último resto distinto de 0.

El fundamento de este algoritmo es que el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r_1.

El algoritmo de Euclides con la hoja de cálculo

Actividad resuelta

- *Utiliza la hoja de cálculo para obtener el máximo común divisor de dos números.*

Algoritmo de Euclides

Nº mayor =	8765432412
Nº menor =	234635256

Nº mayor=	8765432412	
Nº menor =	234635256	
Resto1	83927940	
Resto2	66779376	83927940
Resto3	17148564	66779376
Resto4	15333684	17148564
Resto5	1814880	15333684
Resto6	814644	1814880
Resto7	185592	814644
Resto8	72276	185592
Resto9	41040	72276
Resto10	31236	41040
Resto11	9804	31236
Resto12	1824	9804
Resto13	684	1824

MCD de	8765432412	Y	234635256	=	228

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

- Escribe los números de los que quieres calcular el máximo común divisor en D5 y D6.
- En la celda C9 introduce **=D5**, en C10, = **=D6** y en C11 una fórmula utilizando la función **RESIDUO** que calcule el resto de la división entera entre los números de las celdas C9 y C10 con referencias absolutas.
- En C12 introduce una fórmula con el operador lógico **SI** que devuelva el valor de la celda C10 si en C11 aparece 0, y en caso contrario, calcula con la función **RESIDUO** el resto de la división entre las celdas C10 y C11. Es conveniente poner referencia absoluta a la columna C para copiar más tarde esta fórmula en la columna D.
- Copia esta fórmula con el controlador de relleno hasta la celda C27. En esta columna se puede observar el máximo común divisor como el último resto distinto de 0.
- Para mostrar este resultado se puede copiar el rango C11:C26 en D12: D27 y utilizar la función **BUSCARV,** en la celda K12, que en el rango C11:D27 busca el valor 0 en la columna C y devuelve el valor de la misma fila de la columna D.
- Mejora la apariencia de la hoja poniendo el título e introduciendo en la columna A los textos correspondientes a los valores que figuran en la columna C, observa que a partir del texto Resto 1 puedes arrastrar con el controlador de relleno para obtener los demás.
- Cambia los números de las celdas D5 y D6 para comprobar que el procedimiento funciona. Es posible que tengas que aumentar el número de filas hasta obtener un resto 0.

Número de divisiones en el algoritmo

El número de divisiones efectuadas por el algoritmo nunca supera 5 veces el número de dígitos que tiene el número menor. La demostración de este resultado (*teorema de Lamé*) se basa en que el número de divisiones necesarias para calcular el máximo común divisor de dos números es menor o igual que el resultado de determinar el máximo común divisor de dos términos consecutivos de la sucesión de *Fibonacci* y este número es menor o igual que 5 veces el número de dígitos que tiene el número menor.

Actividad resuelta

- *Comprueba el número de divisiones que debes hacer usando una hoja de cálculo.*

- Para comprobar este último resultado se copia la hoja de cálculo anterior en otra del mismo libro.
- Se eligen dos números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci*, por ejemplo, 144 y 89 para calcular con el algoritmo su máximo común divisor.
- Observa que el máximo común divisor es 1 y que los

Algoritmo de Euclides y

la sucesión de Fibonacci

Nº mayor =	144
Nº menor =	89

Nº mayor=	144	
Nº menor =	89	
Resto1	55	
Resto2	34	55
Resto3	21	34
Resto4	13	21
Resto5	8	13
Resto6	5	8
Resto7	3	5
Resto8	2	3
Resto9	1	2
Resto10	0	1

diferentes restos son los términos anteriores de la sucesión de *Fibonacci*.

- De esta forma el número de divisiones está en función del lugar que ocupa esta sucesión.
- Las propiedades de esta sucesión, relacionadas con el número de oro, permiten acotar el lugar que ocupa un término en función del número de cifras que tiene.
- Como el número menor, 89, tiene dos cifras, el número de divisiones debe ser menor o igual que 10 = (5 x 2), en este caso son 9.

Aplicaciones del algoritmo

El algoritmo de *Euclides* además de calcular, *d*, el MCD de dos números naturales *a* y *b*, permite encontrar dos números enteros *s* y *t* tal que $d = s\cdot a + t\cdot b$. En el caso particular en el que *a* y *b* son primos entre sí se tiene que $s\cdot a + t\cdot b$.= 1; por lo que $s\cdot a = 1 - t\cdot b$, lo que indica que el resto de dividir el número $s\cdot a$ entre *b* es 1. Este método es importante en la teoría matemática sobre números congruentes (Dos números *a* y *c* son congruentes módulo *b* si tienen el mismo resto al dividirlos entre *b*).

Actividades propuestas

88. Calcula un número que al multiplicarlo por 5 se obtenga resto 1 al dividirlo entre 7.

89. El Algoritmo de Euclides permite expresar una fracción como una fracción continua.

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Utiliza la hoja de cálculo para expresar $\frac{12}{7}$ como una fracción continua.

El algoritmo de Euclides se utiliza también en cualquier conjunto donde esté definida la división entera por ejemplo para los polinomios.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

7.2. Los números irracionales. Límite de sucesiones

El número de oro y la sucesión de *Fibonacci*

Fibonacci (sobrenombre de *Leonardo de Pisa*) fue el primero que en 1202 observó la sucesión, que lleva su nombre, asociada al siguiente problema:

Calcula como varía el número de conejos nacidos de una pareja determinada que cada mes produce una nueva pareja, que a su vez después de un mes ya está apta para reproducirse. El número de parejas agregadas cada mes sería 1, 2, 3, 5, 8, …

En esta actividad se utiliza la hoja de cálculo para determinar algunos términos de la sucesión de *Fibonacci* y se comprueba el número al que se aproximan las sucesiones formadas por el cociente entre dos términos consecutivos de esta sucesión.

La sucesión de *Fibonacci*:

Actividad resuelta

- *Utiliza la hoja de cálculo para encontrar términos de la sucesión de Fibonacci.*

- Abre un nuevo archivo en la hoja de cálculo. En la celda **A1** introduce el valor 1, en **A2** también 1 y en **A3** introduce la fórmula **=A1+A2**, con el controlador de relleno copia la fórmula de **A3** hasta **A7**, observa en la barra de fórmulas que lo que aparece en la celda **A4** es **=A2+A3**, en la celda **A5** cambia a **=A3+A4** en la celda **A6** es **=A4+A5** y en la **A7** se tiene **=A5+A6**, y sin embargo en la celda correspondiente observamos en **A3** un *2*, en **A4** un *3*, en **A5** un *5*, en **A6** un *8* y en **A7** un *13*. De esta manera la fórmula que estamos copiando no es sumar los valores de las celdas A1 y A2, sino el criterio de sumar en cada celda los valores de las dos anteriores.
- Copia la fórmula de la celda **A7** hasta **A25**. Los números que obtienes son los términos de la sucesión de *Fibonacci*.
- Colócate en la fila 1 e inserta dos filas en la parte superior, en la primera vas a poner título a la hoja: ***La sucesión de Fibonacci y el número de oro.***
- Con el cursor en la columna A, inserta una columna en la parte izquierda de la hoja escribe *meses* en la celda **A2**, un 1 en **A3** y **rellena en serie** hasta **A27**.

La sucesión de Fibonacci y el número de oro

meses		*Sucesión1*	*(1+raiz(5))/2*
1	1	1,00000000	1,618033989
2	1	2,00000000	
3	2	1,50000000	
4	3	1,66666667	
5	5	1,60000000	
6	8	1,62500000	
7	13	1,61538462	
8	21	1,61904762	
9	34	1,61764706	
10	55	1,61818182	
11	89	1,61797753	
12	144	1,61805556	
13	233	1,61802575	
14	377	1,61803714	
15	610	1,61803279	
16	987	1,61803445	
17	1597	1,61803381	
18	2584	1,61803406	
19	4181	1,61803396	
20	6765	1,61803400	
21	10946	1,61803399	

- Escribe en **D2** el texto *Sucesión1* y en **D3** la fórmula **=B4/B3** que expresa el cociente entre un término de la sucesión de Fibonacci y el anterior y cópiala hasta **D26**.

- Situado en la celda **E2** escribe el texto *(1+Raiz(5))/2* y en la celda **E3** la misma expresión como fórmula, **=(1+Raiz(5))/2.**
- Si es necesario, para obtener 8 decimales en las columnas D y E, elige en el menú **Formato** la opción **Celdas** y en la pestaña **Número** la opción **Número** y determina 8 en **posiciones decimales**.
- Compara los resultados de las celdas D26 y E3. ¿Qué opinas del resultado?
- Aumenta el número de decimales a 10 en las columnas D y E. ¿Qué ocurre?

El número de oro

El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que aunque es un número irracional en la hoja de cálculo aparece con un número finito de cifras decimales, se denomina número de oro o número áureo y se representa con la letra griega Φ.

Además de su importancia en la historia y evolución de las Matemáticas desde el siglo VI a.n.e. está presente en el Arte (Partenón, escultura griega, pintura de Durero, arte renacentista ...), en la Música, en la naturaleza, en la disposición particular de ramas, hojas y semillas, en las espirales de las conchas y esqueletos de muchos organismos y en las proporciones de la persona humana el ombligo divide a la altura total de la persona en dos magnitudes que están en proporción áurea, también está presente en el rostro humano y por supuesto todo lo relacionado con la estética y el diseño asociado a ciertos cánones que nos llevan a considerar un objeto como proporcionado y bello.

Otra sucesión relacionada con Φ

Actividad resuelta

Calcula decimales del número de oro.

- Escribe en **G2** el texto *sucesión2* y en **G3**, una fórmula para expresar el cociente entre un término de la sucesión y el siguiente, cópiala hasta **G26**.
- Situado en la celda **H2** escribe el texto *(-1+Raiz(5))/2* y en la celda **H3** la misma expresión como fórmula,
- Compara los resultados de las celdas **G26** y **H3,** ¿qué conclusión obtienes?

El número que aparece en la celda **H3**, con 10 cifras decimales, es 0,6180339887, es una aproximación del número $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Observa que este número es Φ – 1.

- Comprueba utilizando la hoja de cálculo poniendo, por ejemplo, diez decimales que se verifica que: $\Phi - 1 = \Phi^{-1}$.

Φ	*Φ - 1*	*1 / Φ*
1,6180339887	0,6180339887	0,6180339887

- Aumenta el número de decimales y comprueba los resultados.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Límite de una sucesión

El límite de una sucesión es el número al que se aproximan sus términos de manera que siempre podemos encontrar un término de la sucesión que verifica que su diferencia, y las de todos los términos siguientes, con el límite es tan pequeña como se quiera.

Actividades propuestas

90. Cambia los dos primeros términos de la sucesión de Fibonacci por dos números cualesquiera

- ¿Cuál es el límite de la sucesión formada por el cociente entre un término y el anterior de esta sucesión? …………………………………
- ¿Cuál es el límite de la sucesión formada por el cociente entre un término y el siguiente de esta sucesión? ……………………………………………….

91. Considera la sucesión formada por el cociente entre un término y el anterior de la sucesión de Fibonacci cuyo límite es Φ, el número de oro. Si llamamos (a_n) a esta sucesión se dice que *lim* (a_n) = Φ. ¿Qué lugar ocupa el término a partir del cual la diferencia con el límite es:

a) menor que 0,1 ……… b) menor que 0,001 ………… c) menor que 0,00001?............

92. Considera la sucesión formada por el cociente entre un término y el siguiente la sucesión de Fibonacci cuyo límite es Φ^{-1}, el inverso del número de oro. Si llamamos (b_n) a esta sucesión se dice que lim $(b_n) = \Phi^{-1}$. ¿Qué lugar ocupa el término a partir del cual la diferencia con el límite es:

a) menor que 0,1 ……… b) menor que 0,001 ………… c) menor que 0,00001?............

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

7.3. Interés compuesto

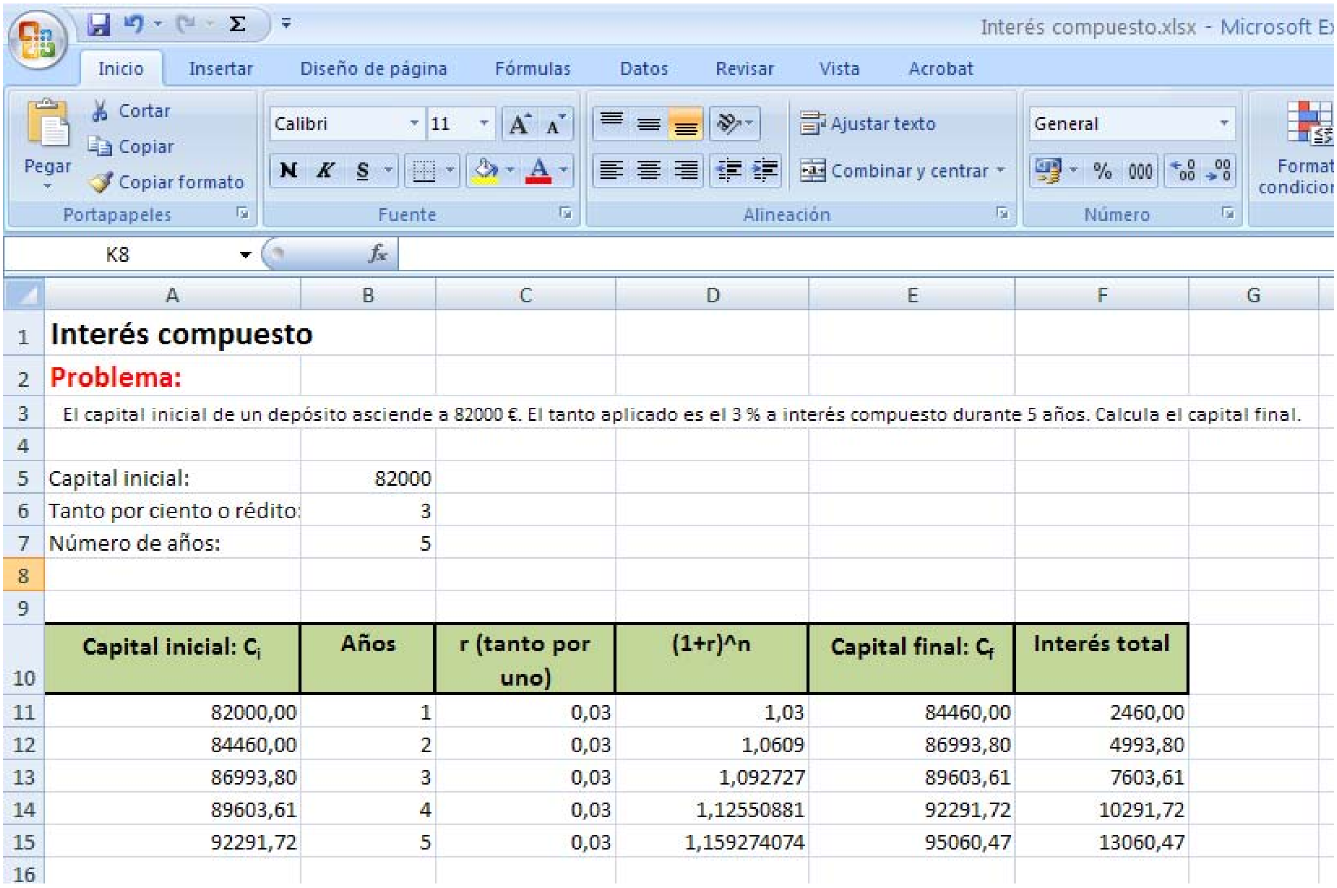
Ya sabes que si se trata de un depósito bancario, el capital final se calculará siguiendo el siguiente procedimiento:

C_i (capital inicial)	1 año	*i* (tanto por uno)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 años	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 años	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n años		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de *n* años, el capital final será $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Para hacer los cálculos puedes utilizar una "Hoja de cálculo". Basta que en la hoja de cálculo adjunta modifiques los datos de las casillas B5 donde está el "Capital inicial", casilla B6 donde está el "Tanto por uno" y de la casilla B7 donde aparece el número de "Años", y arrastres en la columna B hasta que el número final de años coincida con dicha casilla.

El uso de hojas de cálculo simplifica los cálculos repetitivos.



Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47

	A	B	C	D	E	F
1	**Anualidades de capitalización**					
2						
3	**Problema:**					
4	Un empleado desea conocer qué cantidad recibirá después de 20 años si al principio de cada uno de ellos entrega 2000 euros					
5	para ser colocados a interés compuesto al 8 %. Halla la cantidad que percibirá al cabo de ese tiempo.					
6						
7	Anualidad (A):	2000			C_f = A(1+i)^n+A(1+i)^(i-1) +... + A(1+i) =	
8	Rédito r	8	i = r/100		A((1+i)^(n+1)-(1+i))/i	
9	Número de años (n):	20				
10						
11	**Anualidad (A)**	**i (tanto por uno)**	**Capital final: C_f**			
12	2000,00	0,08	98845,84			
13						
14	Recibirá	**98845,84**	euros			
15						
16						

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Anualidades de amortización**						
2							
3	**Problema:**						
4	El ayuntamiento de una ciudad ha emitido un empréstito de 300.000 €, que abona al 6 % de interés compuesto y que desea						
5	amortizar en 30 plazos anuales iguales. ¿Qué anualidad habrá de pagar?						
6							
7	Deuda (D)	300000			Hay que pagar:		D(1+i)^n
8	Anualidad (A)	?			Pagamos:	A(1+i)^(n-1)+A(1+i)^(n-2)+...+A	
9	Rédito r	6	i = r/100		A = (D*(1+i)^n*i)/((1+i)^n-1)		
10	Número de años (n):	30					
11	**Deuda (D)**	**i (tanto por uno)**	**Anualidad (A)**				
12	300000,00	0,06	21794,67				
13							
14	Deberá pagar anualmente		**21794,67**	euros.			
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							

Interés compuesto | Capitalización | **Amortización**

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

7.4. Resolución de sistemas lineales

En esta actividad se utiliza la *hoja de cálculo* para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, expresado por: $\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$ .Dando valores a los parámetros *A, B, C, D, E*, y *F*, se discute el sistema, determinando el número de soluciones y cuando el sistema tiene una solución única se calculan los valores de *x* e *y* que convierten las ecuaciones en identidades.

Actividad resuelta

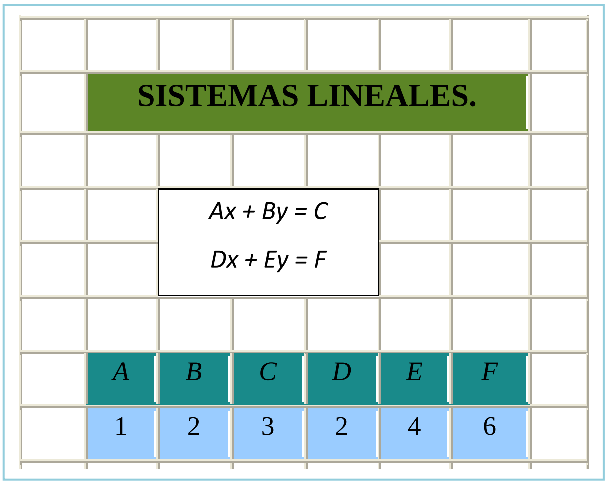
- *Uso de la hoja de cálculo para discutir y resolver sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.*

- En la celda **D3** escribe el título de la práctica: *SISTEMAS LINEALES* y en la celda **C5** el texto: *Escribe el valor de los parámetros del sistema lineal.*
- Introduce los textos *A*, *B, C, D, E* y *F* en las celdas **C7**, **D7**, **E7, F7**, **G7** y **H7.**
- Define las constantes *A, B, C, D, E* y *F* para poder utilizar sus valores sin necesidad de hacer referencia a las celdas inferiores donde se escriben sus valores :
- Para definir los seis parámetros a la vez, selecciona el rango **C7:H8** y en el menú **Insertar**, en la opción **Nombres**, elige **Aplicar …**, en el cuadro de diálogo que aparece comprueba que se va a crear el nombre a partir del **Encabezamiento** y presiona **Aceptar**.
- Introduce en la celda **C10** la siguiente fórmula:

=SI(A*E=D*B;SI(A*F=D*C;"El sistema tiene infinitas soluciones";"El sistema no tiene solución"); "El sistema tiene solución única")

- ✓ Analiza el significado de la fórmula.

- Comprueba el funcionamiento de la hoja que has creado con ejemplos:



- Si *A* = 1, *B* = 2, *C* = 3, *D* = 2, *E* = 4, *F* = 6, se debe obtener:

El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si *A* = 1, *B* = 2, *C* = 3, *D* = 2, *E* = 4, *F* = 1, debe aparecer:

El sistema tiene no tiene solución.

- Si *A* = 1, *B* = 2; *C* = 3, *D* = 1, *E* = 4, *F* = 1 se debe tener:

El sistema tiene solución única.

La fórmula de la celda C10: *A·E* = *D·B*, indica que: $\frac{A}{D} = \frac{B}{E}$, es decir, los coeficientes de *x* e *y* en las dos ecuaciones son proporcionales, si además *A·F* = *D·C*, entonces $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$, los tres parámetros de las dos ecuaciones son proporcionales.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

Cálculo de las soluciones.

- Escribe el texto *Soluciones* en la celda **D12**.
- E en la celda **D14** escribe el texto*, x =*, y en **F14***, y =*.

En E14 y G14, se introduce las fórmulas para obtener las soluciones del sistema.

- En la celda **E14** escribe la fórmula **=(C*E-F*B)/(A*E-D*B)** y en **G14**, la fórmula **=(A*F-D*C)/(A*E-D*B)**

SISTEMAS LINEALES.					
	Ax + By = C				
	Dx + Ey = F				
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	2	3	1	4	1
El sistema tiene solución única					
	SOLUCIONES:				
	x =	**5**	**y =**	**-1**	

- Comprueba que la hoja creada funciona con los siguientes ejemplos:

➢ Si *A* = 1, *B* = 2, *C* = 3, *D* = 1, *E* = 4, *F* = 1, las soluciones son x = 5 y = -1.
➢ Si *A* = 1, *B* = -2, *C* = 3, *D* = -1, *E* = 4, *F* = 5, las soluciones son x = 11 y = 4.
➢ Si *A* = 1, *B* = -2; *C* = 3, *D* = 0, *E* = 2, *F* = 6, las soluciones son x = 9 y = 3:

Cómo mejorar la hoja de cálculo.

Para que el texto *Soluciones*, los textos *x =* e *y =* y los valores de las soluciones, sólo aparezca cuando el sistema tiene solución única se pueden modificar las celdas implicadas de la siguiente forma:

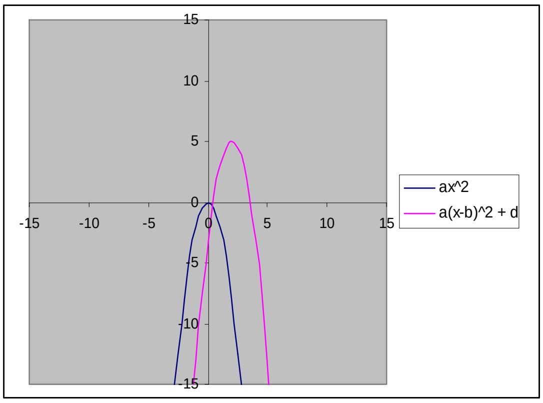
- En la celda **D12** introduce la siguiente fórmula: **=Si(A*E=B*D;" ";"Soluciones")**
- En la celda **D14** cambia el texto por la siguiente fórmula **=Si(A*E=B*D;" ";"x =")** y en **F14**, **=Si(A*E=B*D;" ";"y =")**.
- En la celda **E14** introduce la fórmula **=Si(A*E=B*D;" ";(C*E-F*B)/(A*E-D*B))** y en **G14**, **=Si(A*E=B*D;" ";(A*F-D*C)/(A*E-D*B)**

7.5. Representación de funciones cuadráticas

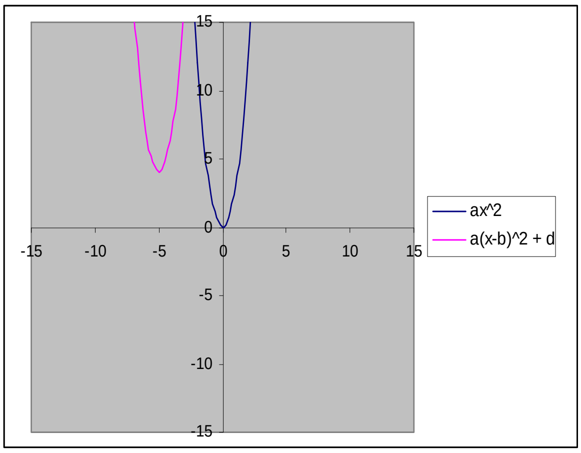
Actividad resuelta

- Utiliza la ***hoja de cálculo*** para representar la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2$, y la gráfica que se obtiene al trasladar la función según un vector (b, d). Esta gráfica representa la función cuadrática definida por: $y = a(x - b)^2 + d$.

- Introduce x, ax^2 y $a(x - b)^2 + d$ en las celdas **A5, B5 y C5** y el valor –10 en la celda **A6, llena en serie** con un incremento de 0,5 hasta 10, también podemos utilizar el comando **Ir a** seleccionando el rango **A6:A46**.
- Para definir las constantes a, b y d de forma que al cambiar sus valores cambie la gráfica sin necesidad de modificar otras celdas de la hoja de cálculo, escribe a, b, d en **D5, E5** y **F5** y –2, 2, 5 en **D6, E6 y F6**, selecciona el rango **D5:F6** y en la opción del menú **Insertar** elige en **Nombre** la opción **Crear**. Define también la variable x con los mismos comandos que acabas de utilizar seleccionando previamente el rango **A5:A46.**



- Escribe la fórmula **=a*x^2** en la celda **B6** y **=a*(x-b)^2+d** en la celda **C6** y cópiala mediante el comando **Llenar hacia abajo** en el rango **B2:C42** o con el controlador de relleno.
- Selecciona el rango **A5:C46** y activa el **Asistente para gráficos**. selecciona en el tipo **XY (Dispersión)** una línea continua y al terminar el asistente coloca el gráfico en la misma hoja.
- Ajusta las escalas para tener –15, 15 en ambos ejes y borra las líneas de división.
- Utiliza las primeras filas de la hoja de cálculo para poner título a la práctica y explicar lo que se pretende al realizarla.
- Cambia los valores de b y d para observar las distintas parábolas que aparecen al variar el vector traslación (b, d), por ejemplo, b = –5, d = –5.
- Modifica también el valor de a por un número positivo, por ejemplo, a = 3, y observa las gráficas, tomando distintos valores de b y d, en la gráfica adjunta se ha tomado b = –5 y d = 4.



Actividades propuestas

93. En una nueva hoja representa la función cuadrática $y = ax^2 + bx + d$, definiendo previamente las constantes a, b y d y la variable x. Observa cómo se modifica la gráfica de la función para distintos valores de los parámetros a, b y d. ¿Qué tienen en común las gráficas cuando b = 0? ¿Qué tienen en común las gráficas cuando d = 0?

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

7.6. Estadística. Parámetros

Vamos a utilizar la hoja de cálculo para determinar parámetros estadísticos.

Actividad resuelta: media, mediana, moda, varianza, deviación típica, cuartil

- *Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas:* 8, 4, 6, 10 y 10. *Calcula su media, su moda y su mediana.*

- Para calcular la media, la mediana y la moda con la hoja de cálculo, copiamos en la casilla B2, B3… los datos: 8, 4, 6, 10 y 10. Escribimos en la casilla A7, Media, y para calcular la media escribimos un signo igual en B7. Buscamos, desplegando las posibles funciones, la función PROMEDIO, y escribimos

  =PROMEDIO(B2:B6),

  que significa que calcule la media de los valores que hay en las casillas desde B2 hasta B6.

Del mismo modo calculamos la mediana buscando en las funciones o escribiendo =MEDIANA(B2:B6) y la moda buscando en las funciones o escribiendo =MODA(B2,B6). biendo =MODA(B2,B6).

B10 =DESVESTP(B2

	A	B	C	D
1		xi		
2		8		
3		4		
4		6		
5		10		
6		10		
7	MAX	10	Recorrido =	6
8	MIN	4		
9	VARP	5,44		
10	DESVESTP	2,33		
11	CUARTIL 1	6	Intervalo Intercuartil =	
12	CUARTIL 3	10		

Igual que hemos calculado la media, la mediana y la moda, la hoja de cálculo se puede utilizar para obtener:

- El recorrido calculando MAX – MIN $\rightarrow$ 6.
- La varianza utilizando VARP $\rightarrow$ 5’44.
- La desviación típica usando DESVESTP $\rightarrow$2’33
- Los cuartiles, (CUARTIL), siendo el cuartil 0 el mínimo; el cuartil 1, Q1; el cuartil 2, la mediana; el cuartil 3, Q3; y el cuartil 4, el máximo.

- Q1 = 6.
- Q3 = 10.
- Intervalo intercuartílico = 10 – 6 = 4.

Actividades propuestas

94. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

Calcula, utilizando el ordenador, la temperatura media, la moda y la mediana.

95. Calcula, utilizando el ordenador, la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

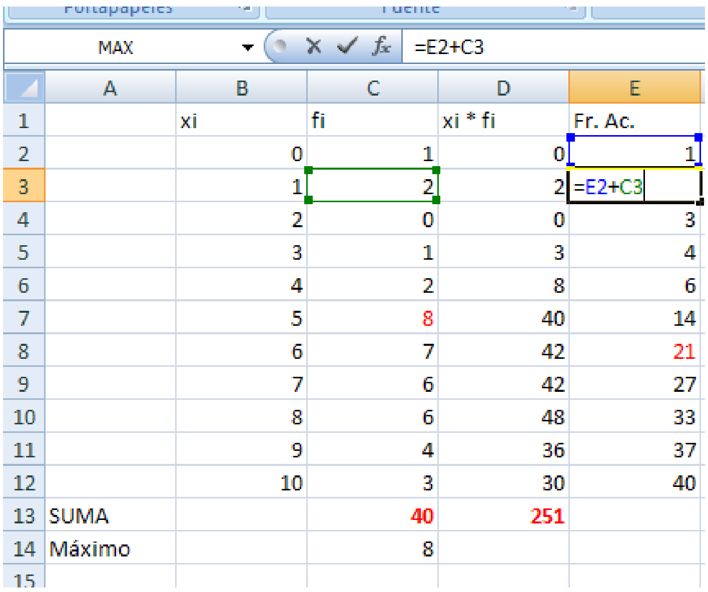
a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos. ¿Influyen en la moda? ¿Y en la mediana? ¿Y en la media?

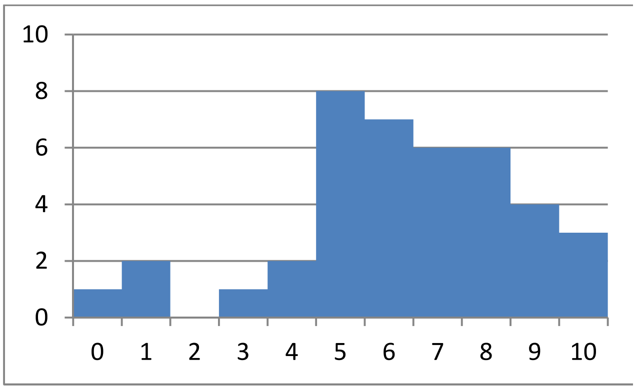
Actividad resuelta: frecuencias relativas y acumuladas, histograma

- *Usa ahora frecuencias relativas y acumuladas con las notas del margen. Dibuja un histograma.*

- Escribimos xi en la casilla B1, fi en la C1.
- En B2 escribimos 0, y en B3, 1. Seleccionamos estas dos casillas y arrastramos hasta la casilla B12.
- Copiamos las frecuencias que aparecen al margen en la columna C.
- En A13 escribimos SUMA. Calculamos la suma de las frecuencias con la tecla: $\sum$ y se obtiene 40 en la casilla C13.
- En la columna D1 escribimos $x_i \cdot f_i$. En D2 escribimos = y pinchamos en B2, escribimos * y pinchamos en C2 (=B2*C2). Seleccionamos D2 y arrastramos hasta D12. Calculamos la suma (251) y dividimos el valor de la casilla D12 entre el de la casilla C12.
- Podemos calcular el valor máximo de las frecuencias, que en este caso se ve a ojo, pero si hubiera muchos más valores, muchas más filas, se puede utilizar la función MAX, que escribimos en C14.
- Para calcular las frecuencias acumuladas utilizamos la columna E. En E2 escribimos =C2. En E3 escribimos =E2+C3. ¿Por qué? Y seleccionando E3 arrastramos hasta E12.



	A	B	C	D	E
1		xi	fi	xi * fi	Fr. Ac.
2		0	1	0	1
3		1	2	2	=E2+C3
4		2	0	0	3
5		3	1	3	4
6		4	2	8	6
7		5	8	40	14
8		6	7	42	21
9		7	6	42	27
10		8	6	48	33
11		9	4	36	37
12		10	3	30	40
13	SUMA		40	251	
14	Máximo		8		
15					



- Para dibujar histogramas con el ordenador utilizando una hoja de cálculo nos encontramos con la dificultad de que éste dibuja los rectángulos separados. Dibuja un diagrama de rectángulos. Para arreglarlo en el caso de que la longitud de todos los intervalos sea la misma, debes señalar uno de los rectángulos, entrar en "*dar formato a la serie de datos*" y, en "*Opciones de serie*" seleccionar en "*Ancho del intervalo*" un ancho del 0 %, es decir, "*sin intervalo*". Si las longitudes son distintas se debe calcular previamente las alturas de los rectángulos.

Actividades propuestas

96. Se ha lanzado un dado 100 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

Utiliza el ordenador para calcular la media, moda y mediana.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

97. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

a) Utiliza el ordenador para calcular la media, moda y mediana. Dibuja un histograma.

b) Repite tú los lanzamientos, ahora sólo diez veces, y calcula de nuevo la media, mediana y moda.

98. Utiliza el ordenador para calcular la media, la mediana y la moda de la siguiente tabla de frecuencias absolutas, que indica el número de hijos que tienen 200 familias entrevistadas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

Dibuja un histograma

99. Utiliza el ordenador para dibujar histogramas y repetir los cálculos de la actividad resuelta anterior.

100. Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas con cuatro intervalos: [20, 25), [25, 30), [30, 35) y [35, 40). Calcula las marcas de clase. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas. Calcula la media y la desviación típica. Calcula gráficamente la mediana y los cuartiles.

101. Haz un estudio estadístico preguntando a tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y represéntala en un diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

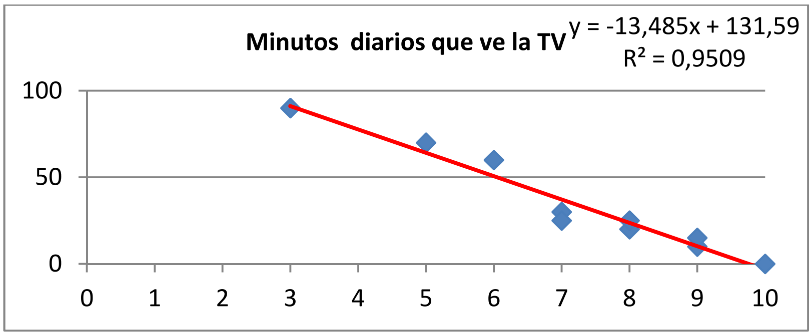
Actividad resuelta: Nube de puntos, correlación y recta de regresión

- Preguntamos a 10 alumnos de 4º ESO por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta. Queremos dibujar las nubes de puntos que los relacionan con las calificaciones de Matemáticas, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	7	8	5	9	9	8	6	7
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	15	25	60	25
Horas semanales de estudio	15	2	9	12	7	14	13	11	7	8
Estatura (en cm)	177	168	157	159	163	179	180	175	169	170

Para hacerlo, abrimos una hoja de cálculo, y copiamos los datos. Seleccionamos la primera y la segunda fila, luego la primera y la tercera y por último la primera fila y la cuarta.

Con la primera y segunda filas seleccionadas, vamos a ***Insertar*, *Dispersión*** y elegimos la ***nube de puntos***. Podemos conseguir que el eje de abscisas vaya de 0 a 10 en "*Dar formato al eje*". Pinchamos sobre un punto de la nube, y elegimos **"*Agregar línea de tendencia*"**. Para que dibuje el ordenador la recta de regresión la línea de tendencia debe ser ***Lineal***. En la pantalla que aparece marcamos la casilla que dice: "***Presentar ecuación en el gráfico***" y la casilla que dice "*Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico*".



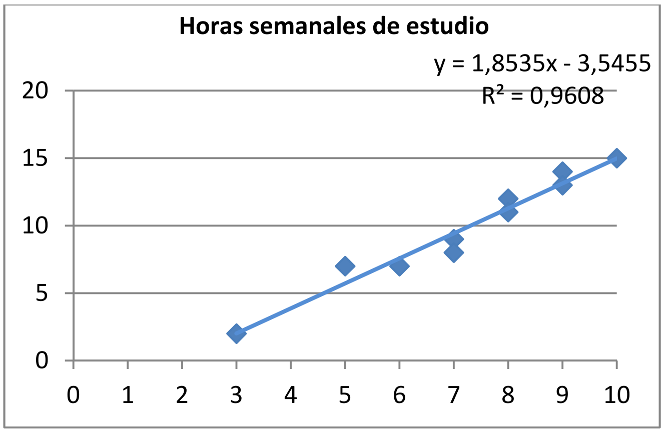
Observa, la recta de regresión, en color rojo, es decreciente y su ecuación es aproximadamente:

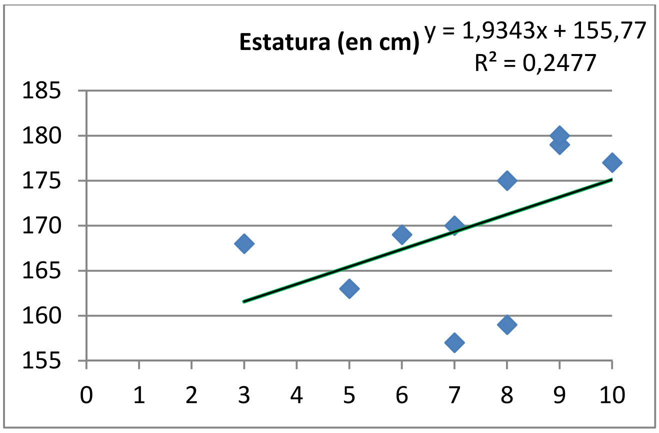
$$y = -13'5\,x + 132.$$

El cuadrado del coeficiente de correlación es $\rho^2 = 0'95$. La correlación es negativa y alta:

$$\rho = \sqrt{0'95} = -0{,}975$$

Hacemos lo mismo con la primera y tercera fila y con la primera y cuarta fila. Obtenemos los gráficos:





Observa que en ambos casos la pendiente de la recta de regresión es positiva pero en el primero el coeficiente de correlación, positivo, es próximo a 1, $\rho = \sqrt{0'96} = 0{,}98$. La correlación es alta y positiva.

En el segundo $\rho = \sqrt{0'25} = 0{,}5$.

Actividades propuestas

102. Se han medido los pesos y alturas de 6 personas, como muestra de las personas que están en una fila o cola de espera, obteniéndose los siguientes resultados:

Pesos (kg)	65	60	65	63	68	68
Alturas (cm)	170	150	168	170	175	180

Se pide:

a) Calcular las medias y las varianzas de esos dos conjuntos de datos unidimensionales.
b) ¿Qué medidas están más dispersas, los pesos o las alturas?
c) Representar gráficamente ese conjunto de datos bidimensional. Calcular la covarianza e interpretar su valor.
d) Dar una medida de la correlación entre ambas variables. Interpretar su valor.

8. HOJA DE CÁLCULO PARA BACHILLERATO

8.1. El número *e* como límite de una sucesión

El número irracional *e* aparece con *John Napier* (*Neper*) que introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático (1614). La primera aproximación al valor de este número se atribuye a *Jacob Bernoulli* (1654-1705) asociado al siguiente problema de interés compuesto:

Actividad resuelta

- *Si se invierte un capital C con un interés del 100% anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtiene un capital 2C. Si los intereses se pagan semestralmente, el capital se transforma en:* $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ *C* = 2,25 *C. Si los intereses se pagan trimestralmente, se obtiene* $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$ *C* = 2,44 *C. En caso de pagos mensuales, el capital que se obtiene es* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ *C* = 2,61 C y si *los pagos son diarios se consigue:* $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ *C* = 2,71 C.

Al aumentar la cantidad de períodos de pago el factor que multiplica al capital *C* se aproxima al número *e* = 2,7182818285…

$$e = lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

El número *e* como límite de una sucesión

Actividad resuelta

- *Calcula decimales del número de e.*

- Escribe el texto *Número e* en la celda **B2** y su valor en la celda **E2** con la fórmula **=EXP(1)**.
- Escribe 1 en la celda **A5** y **Rellena en serie** en la columna A con incremento 1 hasta llegar a 100.
- En la celda **B5** introduce una fórmula para calcular el primer término de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ en función de la celda **A5**, para obtener los 100 primeros términos de la sucesión al copiarla con el controlador de relleno en la columna B.
- Observa que el término que ocupa el lugar 100 se aproxima a las décimas del número *e*.
- En las columnas A y B de la fila 4 introduce los textos *n* y (1+ 1/*n*)^n, respectivamente y cópialos en las columnas D y E de esa fila.
- Escribe 1 en la celda **D5** y **Rellena en serie** en la columna D con incremento 10 hasta 501.

El número e

	Número e	:		2,71828183
n	(1+1/*n*)^n		*n*	(1+1/*n*)^n
1	2		1	2
2	2,25		11	2,60419901
3	2,37037037		21	2,65626321
4	2,44140625		31	2,67569631
5	2,48832		41	2,68585635
6	2,52162637		51	2,69210221
7	2,5464997		61	2,6963305
8	2,56578451		71	2,69938287
9	2,58117479		81	2,70168999
10	2,59374246		91	2,7034951
11	2,60419901		101	2,70494598
12	2,61303529		111	2,70613757
13	2,62060089		121	2,70713369
14	2,62715156		131	2,70797878
15	2,63287872		141	2,70870478
16	2,6379285		151	2,70933519
17	2,64241438		161	2,70988774
18	2,64642582		171	2,71037601
19	2,65003433		181	2,71081059
20	2,65329771		191	2,71119989

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

- Copia en **E5** la fórmula de **B5** y arrástrala con el controlador de relleno hasta **E55**.
- Observa que el término que ocupa el lugar 501 se aproxima a las centésimas del número *e*.
- Vuelve a repetir el procedimiento anterior en las columnas G y H rellenando en serie en la columna G con un incremento de 100 hasta 5001 y en las columnas J y K con un incremento de 1000 hasta 50 001.
- Determina las aproximaciones al número *e* de los términos de la sucesión que ocupan los lugares 5001 y 50001.

El número *e* y el problema de *Bernoulli*

Actividad resuelta

- *Abre una nueva hoja de cálculo del mismo libro para simular el problema propuesto por Jacques Bernoulli:*

A partir de una unidad monetaria, con un 100% de interés anual, calcula los intereses que se perciben aumentando el número de los periodos de pago de intereses, desde anuales a décimas de segundo.

- Compara los resultados obtenidos con el valor del número *e* expresado por la fórmula **= EXP(1)**
- Observa que si el crecimiento fuera continuo los intereses obtenidos por una unidad de moneda sería el número *e*.

Problema de *Bernoulli*

Intereses	n = nº de pagos	$(1+1/n)^n$
Anuales	1	2
Semestrales	2	2,25
Trimestrales	4	2,44140625
Mensuales	12	2,61303529
Diarios	365	2,71456748
Cada hora	8760	2,71812669

El crecimiento exponencial

Existen muchos fenómenos en la naturaleza que siguen un crecimiento exponencial. En Biología se presenta cuando la tasa de variación de una población es proporcional a la población en cada instante, esto ocurre cuando no hay factores que limitan el crecimiento como ocurre con ciertas poblaciones de bacterias. También aparece en cierto tipo de reacciones químicas cuando la velocidad de descomposición de una sustancia es proporcional a su masa, la más importante de estas reacciones es la desintegración radiactiva que se utiliza para asignar fecha a acontecimientos que ocurrieron hace mucho tiempo y ha sido un instrumento indispensable en Geología y Arqueología.

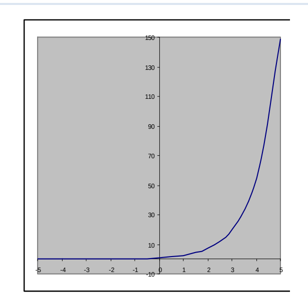
Función exponencial

x	e^x
-5	0,006737947
-4	0,018315639
-3	0,049787068
-2	0,135335283
-1	0,367879441
0	1
1	2,718281828
2	7,389056099
3	20,08553692
4	54,59815003
5	148.4131591

La función exponencial: $f(x) = e^x$

Actividad resuelta

- Representa la gráfica de la función exponencial de base usando una hoja de cálculo.



- Abre una nueva hoja de cálculo del mismo libro, en la celda **A4** escribe -5 y rellena en serie hasta 5, en **B4** introduce la fórmula **=EXP(A4)** y cópiala con el controlador de relleno hasta **B14**.
- Utiliza el **Asistente de gráficos** y elige un tipo de gráfico **XY(dispersión)** para representar la función $f(x) = e^x$

En una parte vacía de la misma hoja de cálculo y del mismo modo que has representado la función $f(x) = e^x$ representa una nueva función: $g(x) = e^{-x}$.

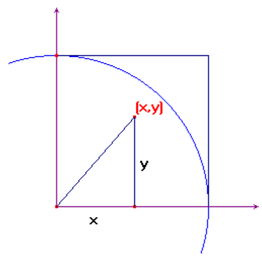
- Las funciones que rigen el crecimiento exponencial son de la forma $h(x) = M\, e^{kx}$ y tienen una gráfica muy similar a la de las funciones $f(x)$ o $g(x)$ que has representado, según que k sea positivo o negativo.

La curva $y = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right)$ se denomina catenaria, es la forma que toma un hilo flexible y homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

8.2. Los números irracionales. Método de *Montecarlo*

Método de *Montecarlo*

En una **hoja de cálculo** la función **ALEATORIO()** permite obtener números aleatorios mayores o iguales que cero y menores que uno. Se va a utilizar esta función para calcular de modo aproximado el área de una región del plano utilizando el **método de Montecarlo**, que consiste en elegir puntos de forma aleatoria en una región del plano de área conocida en la que está contenida la región cuya área queremos calcular. Se necesita además una condición para determinar cuando un punto, elegido de forma aleatoria, pertenece a la región de área desconocida, es decir, hace diana.



En nuestro caso la región de área conocida es un cuadrado de lado 1, con un vértice en el origen de coordenadas y dos lados en la parte positiva de los ejes, y la que queremos calcular, la cuarta parte de un círculo de radio 1, como se sabe que el valor del área de esta región es $\frac{\pi}{4}$. El valor aproximado de esta superficie multiplicado por cuatro nos da un valor aproximado del número π.

Un punto aleatorio de este cuadrado está definido por su abscisa x y su ordenada y, la condición para que pertenezca al círculo es que $x^2 + y^2 \leq 1$.

CÁLCULO APROXIMADO DEL NÚMERO PI

Nº de pruebas	x	y	x^2+y^2	Dianas
1	0,09581521	0,53411177	0,29445593	1
2	0,69056234	0,81987982	1,14907928	0
3	0,56510465	0,04358231	0,32124268	1
4	0,30587082	0,63298234	0,4942236	1
5	0,03463677	0,20941041	0,04505243	1
6	0,26838812	0,95846931	0,9906956	1
7	0,97161459	0,97089143	1,88666509	0
8	0,94258199	0,36648659	1,02277322	0
9	0,94148269	0,01784368	0,88670806	1
10	0,72321722	0,41084836	0,69183952	1
11	0,2726713	0,12040009	0,08884582	1
12	0,79643486	0,55448567	0,94176285	1
13	0,95447899	0,80885816	1,56528167	0
14	0,79855669	0,03777069	0,63911941	1
15	0,93105884	0,7557124	1,4379718	0
16	0,96144534	0,4676911	1,1431121	0
17	0,65489234	0,03243809	0,42993621	1

Actividad resuelta

- *Utiliza el método de Montecarlo para aproximar el número π.*

- En la celda **A4** escribe *Nº de pruebas*, en **B4**, *x*, en **C4**, *y*, en **D4**, $x^2 + y^2$, y en **E4** *Dianas*.
- En la celda **A5** introduce el número 1 y **rellena en serie** hasta **A29**. En la celda **B5** inserta la fórmula **=ALEATORIO()** y **rellena hacia abajo** en el rango **B5:C29**.
- En **D5** introduce la fórmula **=B5^2+C5^2**, y arrástrala hasta **D29**.
- En **E5** inserta la condición **=SI(D5<1;1;0)** y arrás-

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

trala hasta **E29**.

- Los valores 1 de la columna E, *Dianas*, indican los puntos aleatorios que pertenecen a la región del plano cuya área se quiere calcular.
- Observa que cada vez que se modifica la hoja de cálculo, la función ALEATORIO vuelve a recalcular sus valores. También se pueden cambiar presionando la tecla **F9**.

  - Cálculo aproximado de π

- Para contar el número de dianas se elige una parte vacía de la hoja como, por ejemplo, las columnas G, H e I.
- En la celda **G4** escribe *Nº de pruebas*, en **H4**, *Nº de dianas* y en **I4**, *Valor de π.*
- En la celda **G5** introduce la fórmula **=A29**, que es el número de pruebas, en **H5**, **=SUMA($E$5:E29)** que indica el número de puntos que hay en nuestra región y en **I5**, **=4*PROMEDIO($E$5:E29)**, que es un valor aproximado de π.
- Aumenta el número de pruebas a 50, **Rellena en serie** en la columna A hasta **A54,** y arrastra las fórmulas de las columnas B, C y D hasta la fila 29.
- Lleva los resultados obtenidos a las columnas G, H e I: En la celda **G6** introduce la fórmula **=A54**, en **H6**, **=SUMA($E$5:E54)** y en **I6**, **=4*PROMEDIO($E$5:E54).**
- Aumenta el número de pruebas hasta 2000 y completa las columnas B, C, D y E. Cuando el número de celdas, implicadas en una operación con la hoja de cálculo, aumenta es conveniente utilizar la opción **Ir a …** y escribiendo en **Referencia** el rango que queremos seleccionar aparece resaltado. Las opciones del comando **Rellenar** del menú **Edición** facilitan copiar fórmulas o introducir valores en serie sin necesidad de desplazarse con el ratón.
- Lleva los resultados obtenidos para 100, 500, 1000 y 2000 pruebas a la tabla de las columnas G, H e I, de la misma forma que se ha hecho para 50 pruebas hasta obtener una tabla similar a la siguiente:

Nº de pruebas	**Nº de dianas**	**Valor de pi**
25	19	3,04
50	40	3,2
100	67	2,68
500	385	3,08
1000	786	3,144
2000	1570	3,14

- Las fórmulas que tienes que introducir aparecen en las cuatro últimas filas de la siguiente tabla.

Nº de pruebas	**Nº de dianas**	**Valor de pi**
=A29	=SUMA($E$5:E29)	=4*PROMEDIO($E$5:E29)
=A54	=SUMA($E$5:E54)	=4*PROMEDIO($E$5:E54)
=A104	=SUMA($E$5:E104)	=4*PROMEDIO($E$5:E104)
=A504	=SUMA($E$5:E504)	=4*PROMEDIO($E$5:E504)
=A1004	=SUMA($E$5:E1004)	=4*PROMEDIO($E$5:E1004)
=A2004	=SUMA($E$5:E2004)	=4*PROMEDIO($E$5:E2004)

- Presiona la tecla **F9** y observa cómo se modifican los valores aproximados de π.

8.3. La catenaria

La curva $y = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right)$ se denomina catenaria, tiene la forma que toma un hilo flexible y homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

La constante *k* es el cociente entre el peso por unidad de longitud y la componente horizontal de la tensión que es constante.

Actividades resueltas

- *Utiliza una hoja de cálculo para dibujar una catenaria*

- Escribe el texto *k* en la celda **B3** y su valor en la celda **C3**, por ejemplo, 0,7.
- Introduce el texto *x* en la celda **A5** y (1/2k)·(e^{kx}+e^{-kx}) en **B5.**
- Escribe –6 en la celda **A6** y **Rellena en serie** en la columna A con incremento 0,5 hasta llegar a 6.
- En la celda **B6** introduce una fórmula para calcular el valor de (1/2k)·(e^{kx}+e^{-kx}), siendo *k* la celda C3 con referencias absolutas y sustituyendo *x* por la celda A6.
- Copia con el controlador de relleno la fórmula de B6 hasta B30.
- Utiliza el **Asistente de gráficos** y elige un tipo de gráfico XY(dispersión) para representar la función.

CATENARIA

k=	0,7

x	(1/2k)(e^{kx}+e^{-kx})
-6	47,64380473
-5,5	33,58167355
-5	23,67546382
-4,5	16,69922622
-4	11,78961202
-3,5	8,33902879
-3	5,920447386
-2,5	4,234554728
-2	3,072712093
-1,5	2,291134905
-1	1,793098579
-0,5	1,516968313
0	1,428571429
0,5	1,516968313
1	1,793098579
1,5	2,291134905
2	3,072712093

- Cambia el valor 0,7 de la celda C3 por números comprendidos entre 0,3 y 3 y observa cómo cambia la curva.

La forma catenaria minimiza las tensiones, por esa razón, una curva catenaria invertida se usa en arquitectura, ya que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco. Ha sido utilizada, sobre todo, por *Gaudí*.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

8.4. Cálculo del valor aproximado de $\frac{senx}{x}$ cuando *x* tiende a cero

Actividades resueltas

- *Utiliza una hoja de cálculo para aproximar* $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$.

- Nos situamos en la celda **A1** para poner el título y reservamos **A3** y **A4** para explicar el contenido de la hoja.
- En la celda **A6** escribimos *valor inicial de x =* y en **B6** su valor que en nuestro caso será 1, ya que lo que pretendemos es dar al ángulo *x* valores muy próximos a 0. En **A7** escribimos *factor reductor =* y en **B7** un valor menor que 1 por el que vamos a ir multiplicando los valores del ángulo para obtener números cada vez más pequeños, por ejemplo 0,6.
- En la celda **A9** escribimos *valores de x* ; en **B9** *sen*(*x*)*;* en **C9** *sen*(*x*)/*x* y reservamos la celda **A10** para separarlos de las fórmulas que vamos a introducir a continuación.
- En **A11** introducimos el valor inicial, que como ya está introducido en la celda **B6,** basta con que escribamos **=B6.** En **A12** queremos escribir este mismo valor reducido por el factor que hemos introducido en B7. ¿Cómo lo haríamos? Puesto que el factor queremos que permanezca constante al utilizar el comando "Llenar hacia abajo", introducimos la fórmula **=A11*$B$6**. Para llenar el resto de la columna es suficiente seleccionar, por ejemplo, el rango (A12:A30) y activar "**Llenar hacia abajo"**.

¿Qué deberíamos escribir en las celdas B11 y B12? Colocados en la celda **B11** introducimos la fórmula **=sen(A11);** en **C11** **=B11/A11** y después de seleccionar el rango **(B11:C30)** activamos **"Llenar hacia abajo".**

Cálculo aproximado del valor de sen(x)/x
===
Esta hoja de cálculo estima el valor del cociente entre el seno de un ángulo y el propio ángulo

valor inicial de x=	**1**
factor reductor=	**0,6**

valores de x	**sen(x)**	**sen(x)/x**
1	0,841470985	0,841470985
0,6	0,564642473	0,941070789
0,36	0,352274233	0,978539537
0,216	0,214324298	0,99224212
0,1296	0,129237508	0,99720299
0,07776	0,07768166	0,998992535
0,046656	0,046639075	0,999637242
0,0279936	0,027989944	0,999869398
0,01679616	0,01679537	0,999952982
0,010077696	0,010077525	0,999983073
0,006046618	0,006046581	0,999993906
0,003627971	0,003627963	0,999997806
0,002176782	0,002176781	0,99999921
0,001306069	0,001306069	0,999999716
0,000783642	0,000783642	0,999999898
0,000470185	0,000470185	0,999999963
0,000282111	0,000282111	0,999999987
0,000169267	0,000169267	0,999999995
0,00010156	0,00010156	0,999999998
6,0936E-05	6,0936E-05	0,999999999

- Observamos que cuanto más próximos a 0 son los valores de *x* más cercanos están los de *x* y *sen*(*x*). ¿Qué conjetura que relacione un ángulo con su seno podemos obtener a partir de este hecho? ¿Podemos estimar un valor para la indeterminación del límite del cociente $\frac{senx}{x}$ cuando hacemos tender el valor de *x* hacia cero?

A pesar de que *sen*(*x*) y *x* tienden a 0, se tiene que: $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

- Podemos cambiar el factor 0,6 por 0,7; 0,5; etc. con objeto de obtener distintas aproximaciones. ¿Cómo crees que va a influir esta modificación en el resultado?

8.5. Optimización de funciones

Vamos a utilizar una hoja de cálculo para aproximar un problema de optimización, en este caso para calcular cuando un volumen es máximo. De forma similar puedes resolver otros problemas similares.

Actividades resueltas

- *En una pastelería es necesario construir cajas con unas planchas de* 60 *cm de largo por* 40 *cm de ancho, cortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas. Si llamamos e al lado de cada uno de los cuadrados que recortamos. ¿Para qué valor de e se obtiene una caja de volumen máximo*?

- Abrimos en una hoja de cálculo la hoja1, dejamos las primeras filas para poner título a la hoja y explicar su contenido. Activamos la celda **A9** y escribimos *Volumen:* y en **B9** la expresión que nos da el volumen de la caja **(60-2*e)*(40-2*e)*e**. En la celda **A10** escribimos **e** y en **B10** su significado. En **A12** escribimos valor inicial de **e**, en **A13** valor final de **e** y en **A14** incremento, en **B12** escribimos el valor 0, en **B13** el valor 20 y en B14 la fórmula **=(B13-B12)/20**.
- En la celda **D11** escribimos *valor de e* y en **E11** *valor de V*, en **D12** insertamos la fórmula **=B12**, en **D13** **=D12+$B$14** y situados en esta celda arrastramos el controlador de relleno hasta **D32** para copiar esta fórmula.
- En el rango **E12:E32** escribimos las fórmulas que nos permiten obtener el valor del volumen de la caja en función de los valores del rango **D12:D32**, para esto es suficiente escribir en **E12** la fórmula **=(60-2*D12)*(40-2*D12)*D12** y situados en esta celda arrastrar el controlador de relleno hasta **E32**.
- Seleccionamos el rango **E12:E32** y activamos el menú contextual de la barra de estado de la ventana de la aplicación y elegimos Máximo (**MAX**) aparece en esta barra el mayor valor del rango seleccionado que en este caso es 8448 y está en la celda **E20**, la celda **D20** contiene el valor 8 lo que significa que la solución del problema está entre 7 y 9.
- Cambiamos el valor 0 de **B12** por 7 y el de **B13** por 9 y repetimos el apartado anterior. Ahora el valor máximo es 8450,208 y el valor de **e** correspondiente 7,8 que está entre 7,7 y 7,9.
- Repetimos este proceso hasta obtener la solución con tres decimales exactos.
- En algún momento será necesario cambiar el formato de los rangos **D12:E32** y **B12:B14** para aumentar el número de decimales que visualizamos. Para ello es suficiente seleccionar uno de los dos rangos y activar en el menú **Formato** en comando Celdas elegir la pestaña **Número** y en ella la categoría **Número** aumentando los decimales hasta 6 en **Posiciones decimales**. Una vez establecido el formato en uno de los rangos utilizamos la opción **Copiar formato** de la barra de herramientas estándar para copiarlo en el otro. También podemos seleccionar ambos rangos a la vez pulsando la tecla <Control> antes de terminar la primera selección y manteniéndola pulsada hasta comenzar la otra.
- El resultado de la hoja de cálculo después de ponerle título y comentarios debe ser muy similar a la imagen que se muestra a continuación:

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

MAXIMO DE UNA FUNCION					
**************************************					
Esta hoja de cálculo permite determinar entre que valores					
se encuentra el máximo de una función.					
		PROBLEMA DE LA CAJA			
		======================			
VOLUMEN:	(60-2*e)*(40-2*e)*e				
e:	esquina				
			valor de e	valor de V	
valor inicial:	7,846000		7,846000	8450,446927	
valor final:	7,848000		7,846100	8450,446958	
incremento	0,000100		7,846200	8450,446986	
			7,846300	8450,447012	
			7,846400	8450,447037	
			7,846500	8450,447059	
			7,846600	8450,447079	
			7,846700	8450,447097	
			7,846800	8450,447112	
			7,846900	8450,447126	
			7,847000	8450,447138	
			7,847100	8450,447147	
			7,847200	8450,447154	
			7,847300	8450,44716	
			7,847400	8450,447163	
			7,847500	8450,447164	
			7,847600	8450,447163	
			7,847700	8450,447159	
			7,847800	8450,447154	
			7,847900	8450,447146	
			7,848000	8450,447137	

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

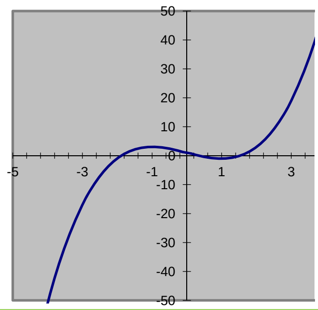
8.6. Cálculo de soluciones aproximadas

En esta actividad se trata de utilizar la *Hoja de cálculo* para encontrar las soluciones de una ecuación. Este método es muy útil cuando el grado de la ecuación es mayor que 2 y no tiene soluciones enteras, pues por este procedimiento, se obtienen soluciones aproximadas.

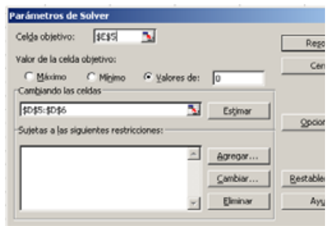
Actividades resueltas

- *Calcula las soluciones aproximadas de la ecuación:* $x^3 - 3x + 1 = 0$.

- En la celda **A1** se escribe el texto *x*, en **B1**, x^3 - 3*x* + 1; en el rango **A2:A12** se introducen los números: –5, –4, –3, ... hasta 5, en **B2** la fórmula **=A2^3-3*A2+1** y se copia con el controlador de relleno en el rango **B2:B12**.



- Se observa que en la columna **B** hay tres cambios de signo lo que significa que la ecuación tiene tres soluciones reales en el intervalo (–5, 5).
- Para comprobarlo se dibuja la gráfica de la función $y = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo [–5, 5], utilizando, con el **Asistente de gráficos,** el tipo **XY(Dispersión)** a partir del rango **A2:B12**. Como es una ecuación polinómica de tercer grado sabemos que son las únicas raíces.
- Para facilitar los cálculos se pueden copiar los valores de las columnas A y B, implicados en los cambios de signo, en otra parte de la hoja, por ejemplo, el rango **A5:B9** en **D5:E9**.



- Para calcular la primera solución se ejecuta el comando **Solver** de la opción del menú **Herramientas**; se elige como **Celda objetivo, $E$5,** en la opción **Cambiando celdas** se introduce el rango **$D$5:$D$6**, y en **Valor de la celda objetivo, Valores de 0**, presionando **Resolver,** y aceptando la solución de **Solver**, en la celda **E5** aparece un valor muy próximo a 0 y en **D5** una solución de la ecuación.

x	x^3 - 3x + 1		Soluciones	Valores ≈ 0
-5	-109			
-4	-51			
-3	-17			
-2	-1		-1,87938512	0,000000886
-1	3			
0	1		0,34729642	-0,000000184
1	-1			
2	3		1,53208878	-0,000000420
3	19			
4	53			
5	111			

- Para calcular las otras dos soluciones el método es similar, para la segunda la celda objetivo es **$E$7** y en la tercera **$E$9** (o $E$8) el rango que hay que introducir para obtener la segunda solución es **$D$7:$D$8** y para la tercera **$D$8:$D$9**.
- Con objeto de mejorar el aspecto de la hoja se pueden borrar los datos superfluos de las columnas **D** y **E,** poner un encabezamiento a las soluciones y a los valores próximos a 0, quitar el formato exponencial de los números y elegir, por ejemplo, 8 decimales y dar un formato centrado a los datos. El resultado se muestra en la siguiente tabla:
- Las soluciones aproximadas de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$, redondeando a 3 decimales, son:

$$x_1 = -1{,}879,\ x_2 = 0{,}347 \text{ y } x_3 = 1{,}532.$$

103. Utiliza un método similar para calcular las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

a) $y = x^3 - 5x + 3$ b) $y = x^4 - 5x^2 + 6$ c) $y = x^3 - 7x + 6$ d) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$.

Autora: María Molero
Revisor: **
Ilustraciones de la autora

AUTOEVALUACIÓN

1. Valora de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto al programa informático. (1 muy fácil y 4 muy difícil)

1 2 3 4

2. Puntúa de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto a los contenidos matemáticos. (1 muy fácil y 4 muy difícil)

1 2 3 4

3. Valora de 1 a 4 tu interés al realizar esta actividad (1 nada interesante y 4 muy interesante).

1 2 3 4

4. El punto que está a igual distancia de los tres lados del triángulo es:

a) Circuncentro b) Baricentro c) Ortocentro d) Incentro

5. El punto donde se cortan las medianas se llama: (elige la respuesta correcta)

a) Circuncentro b) Baricentro c) Ortocentro d) Incentro

6. Indica tres puntos por los que pasa la recta de Euler.

………………………………………………………………………………………………

7. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P' simétrico del punto $P(1, 2)$ respecto al eje de abscisas? (elige la respuesta correcta)

a) P' (–1, 2) b) P' (–1, –2) c) P' (1, –2) d) P' (1, 2).

8. ¿Qué rectas deja invariantes una simetría axial?

a) Las rectas perpendiculares al eje de simetría.
b) El eje de simetría y las rectas perpendiculares al eje de simetría.
c) El eje de simetría y las rectas paralelas al eje de simetría
d) El eje de simetría.

9. La traslación según el vector u (3, –1) transforma el punto $P(–2, 1)$ en el punto P'. ¿Qué coordenadas tiene el punto P'? (elige la respuesta correcta)

a) P' (5, –2) b) P' (1, 0) c) P' (5, 0) d) P' (1, –2)

10. Puedes hacer cualquier observación o sugerencia:

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………