Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB de ESO

Capítulo 12

Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Miguel Ángel Paz

Revisora: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Miguel Ángel Paz y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Entre las diversas funciones hay algunas que tienen una importancia especial, o la han tenido históricamente. En estos dos capítulos te mostramos tres tipos muy importantes.

Términos como *crecimiento exponencial* o *curva sinusoidal* derivan de este tipo de funciones.

Tienen unas propiedades importantísimas en el análisis matemático, ingeniería, medicina, ciencias sociales, etc. En este capítulo aprenderás el cálculo de logaritmos y las propiedades de las funciones exponenciales y circulares y de sus gráficas.

El término *logaritmo* fue acuñado en 1614 por el matemático escocés *John Neper* (1550-1617). Antes de la invención de las calculadoras electrónicas, los logaritmos también fueron imprescindibles para el cálculo de potencias de números no enteros.

Las funciones trigonométricas son muy conocidas y constituyen uno de los ejemplos más populares de funciones periódicas. Ellas u otras funciones relacionadas se encuentran por doquier en la naturaleza y se utilizan en física, electrónica, etc. Numerosas gráficas comparten sus propiedades, como por ejemplo la forma de una onda, también llamada *sinusoide*, que debe este nombre a la función *seno*.

John Napier (Neper). Barón de Merchiston

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. Función exponencial

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x},\ y = 5^{-x}.$$

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

En este curso estudiamos funciones exponenciales sencillas, del tipo $y = b^x$, donde la base b es un número positivo distinto de 1.

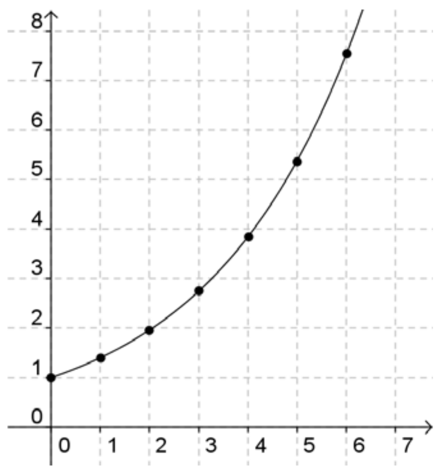
Actividades resueltas

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de *"x"* horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	Núm. bacterias (*y*)
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la *"x"* valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general la "x" sí puede tener valores negativos. Sin embargo la base b solo puede tener valores positivos. Asimismo, observarás que la variable *"y"* también resulta siempre positiva. Más adelante recogemos estas propiedades al hablar de dominio y recorrido de la función exponencial.

Actividades propuestas

1. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

Observarás que los valores de “*y*” aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de “*x*” aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 3. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

2. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

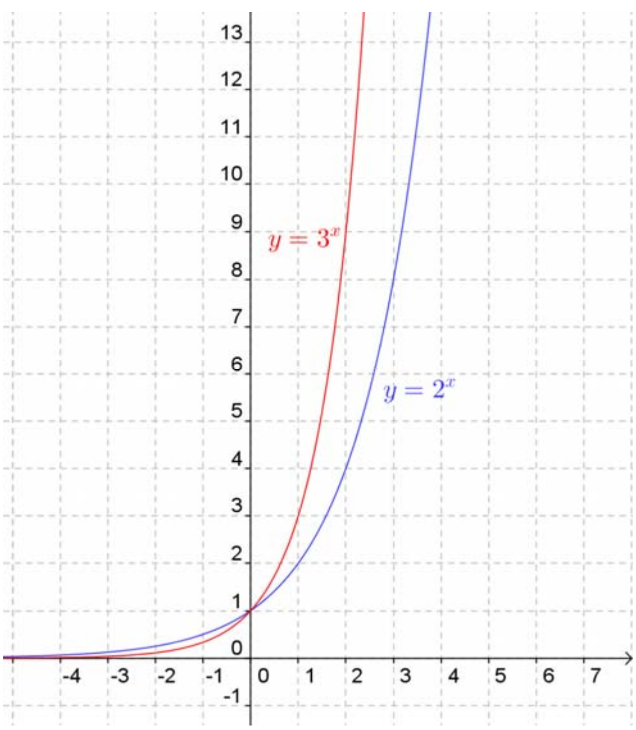
1.2. Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base “*b*”. Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

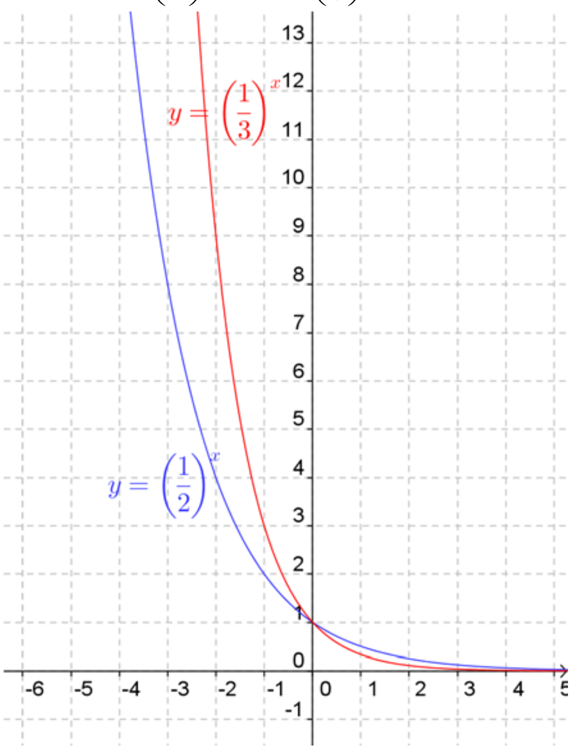
En el caso en el que *b* = 1 tenemos la función constante *y* = 1, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es (0, +∞). Es decir, "*y*" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos (0, 1), (1, b) y (–1, 1/b).
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es b > 1

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Cuando la base es 0 < b < 1

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

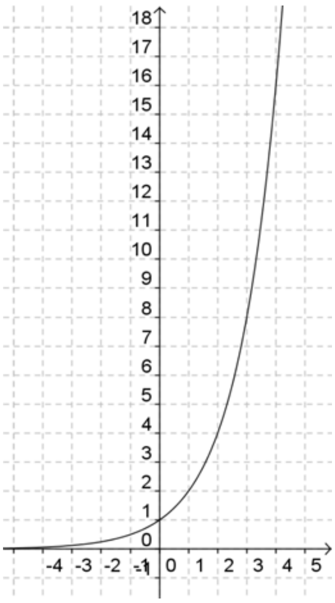
Actividades resueltas

- Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

Solución:

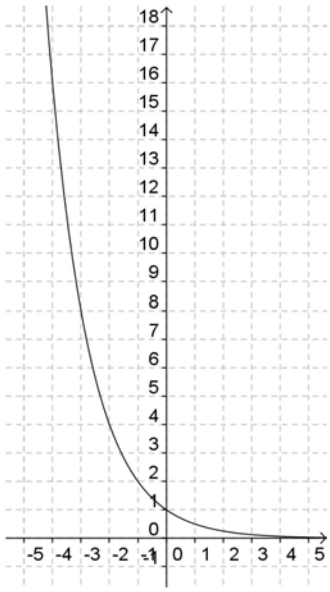
Función $y = 2^x$

x	*y*
...	...
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...



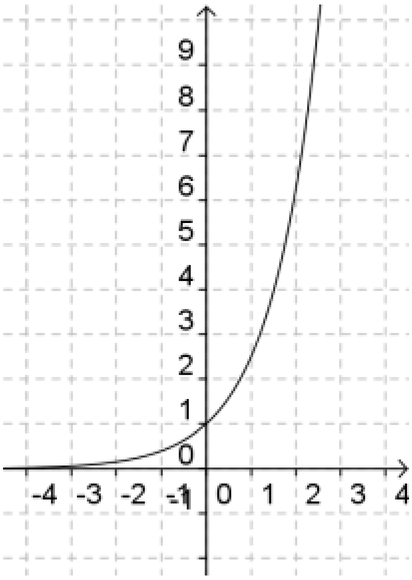
Función $y = 2^{-x}$

x	*y*
...	...
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
...	...

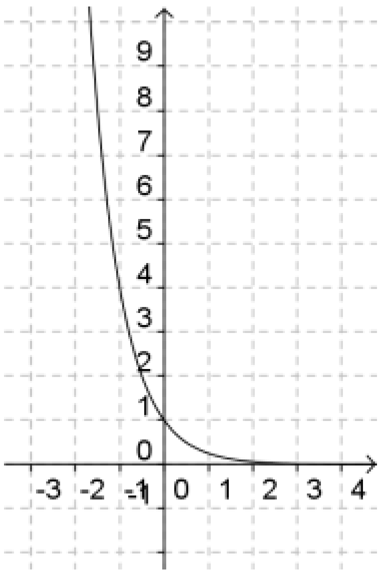


- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

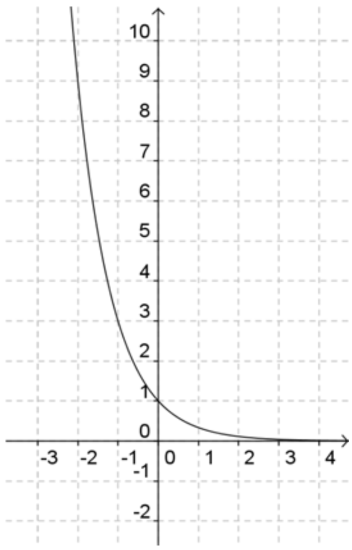
Ambas son funciones exponenciales porque pasan por el punto (0, 1) y tienen por un lado como asíntota horizontal el eje OX, mientras que por el otro lado tienden a + ∞.

La función (a) es $y = 2{,}5^x$ porque pasa por el punto (1, 2’5).

La función (b) es $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa por el punto (–1, 4).

- Representa la función $y = 3^{-x}$

Solución:



Por tener exponente negativo es:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x .$$

Por tanto su gráfica es la del margen.

Observa que pasa por los puntos (–1, 3), (0, 1) y (1, 1/3).

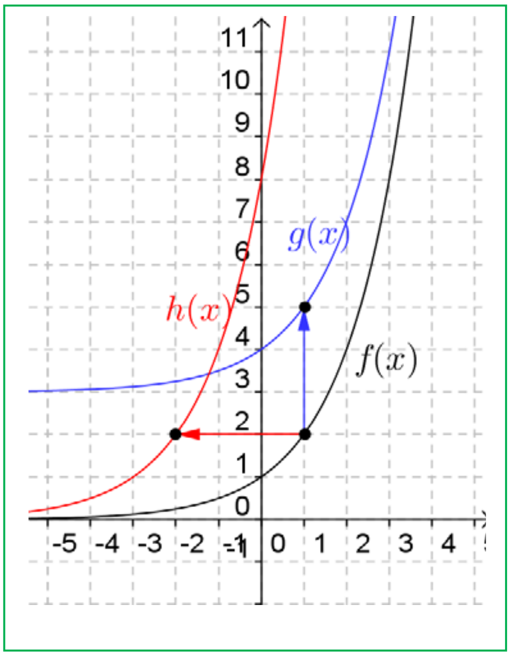
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto anteriormente, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x + 3$ y $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

La función *g(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia arriba 3 unidades.

La función *h(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia la izquierda 3 unidades.

Por tanto sus gráficas son estas, representadas en diferente color:



1.3. El número *e*. La función e^x

El número *e* tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Es un número irracional.

El número *e* se define como el límite cuando *n* tiende a infinito de la siguiente sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Su valor aproximado es *e* = 2,71828182846...

Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico).

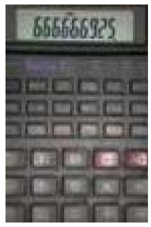
Con la ayuda de la calculadora se puede comprobar cómo los valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se acercan cada vez más al valor *e* = 2,71828182846... a medida que aumenta el valor de *n*.

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de *e* con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta *e* pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas



3. Utilizando la calculadora, en tu cuaderno haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

4. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

Cultivo de la bacteria Salmonella

5. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

6. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

7. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.1. Definición y cálculo elemental de logaritmos

Recuerda que:

La expresión $\log_b a$ se lee "logaritmo de a en base b".

$\log_b a$ es el exponente al que hay que elevar "b" para que el resultado sea "a".

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

"b" se llama **base** y "a" se llama **argumento**.

Observaciones:

- La base tiene que ser un número positivo y distinto de la unidad.
- El argumento tiene que ser positivo y distinto de 0.

Ejemplos:

a) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un par de propiedades elementales

- El logaritmo de la base siempre vale 1: $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- El logaritmo de 1 en cualquier base siempre vale 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmos inmediatos

Se llaman así los que se calculan directamente aplicando la definición.

Ejemplos:

- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- $\log 10000 = 4$ porque $10^4 = 10000$.

Cuando no se escribe la base quiere decir que la base es 10 (*log* x). Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales**. Los logaritmos en base e se llaman logaritmos neperianos y se escriben *ln x*.

Otros logaritmos no son inmediatos pero se pueden calcular también aplicando la definición, **igualando exponentes**. Esto pasa cuando la base y el argumento son potencias del mismo número.

Ejemplos:

- Para hallar $\log_4 8$ ponemos $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Para hallar $\log_4 32$ ponemos $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Actividades resueltas

- Halla los siguientes logaritmos: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d) $\log 1/100$; e) $\log_3 0{,}111\ldots$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; y calcula el valor de x en las siguientes igualdades: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Soluciones:

a) $\log_4 256 = 4$, porque $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = -5$, porque $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$.

c) $\log_2 1/2 = -1$, porque $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

d) $\log 1/100 = -2$, porque $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$.

e) $\log_3 0{,}111\ldots = -2$, porque $0{,}111\ldots = 1/9$, y entonces $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.

f) $\log_3 3 = 1$, porque $3^1 = 3$ (el logaritmo de la base siempre vale 1)

g) $\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$ (el logaritmo de 1 siempre vale 0).

h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$.

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0{,}1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \dfrac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ no existe solución, porque ninguna potencia da 0 como resultado.

l) $\log(-100) = x$ no existe solución, porque el resultado de calcular una potencia de base positiva siempre es positivo.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Actividades propuestas

8. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición (sin calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0{,}25$ f) $\log 0{,}001$

9. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes (sin calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0{,}125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Halla el valor de *x* en las siguientes igualdades:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0{,}5 = -1$ e) $\log x = -4$.

2.1.2. Logaritmos decimales y neperianos con la calculadora

Hasta aquí hemos aprendido a calcular logaritmos utilizando la definición. Sin embargo solamente se puede hacer así en unos pocos casos (en concreto cuando el argumento es una potencia de la base del logaritmo).

Por ejemplo no se pueden calcular $log_4\ 35$, $log_{10}\ 7$, $log_4 30$, $log_9 5$.

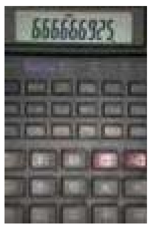
Las calculadoras científicas disponen de teclas para hallar únicamente dos o tres tipos de logaritmos (según el modelo de calculadora):

<table>
<tr><td>Logaritmos decimales (en base 10): </td><td rowspan="2">Logaritmos neperianos (en base e):
Logaritmos neperianos son los que tienen como base el número e = 2,718281…
También se llaman logaritmos naturales.
Los logaritmos neperianos se escriben de tres modos:
$\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$ </td></tr>
<tr><td>Logaritmos en cualquier base:
En algunas calculadoras puede hallarse directamente poniendo la base y el argumento. </td></tr>
</table>

Ejemplos:

- Comprueba con tu calculadora que $log\ 7 = 0{,}845$ y que $\ln 7 = 0{,}946$ (valores redondeados).
- Comprueba también que $\log 10 = 1$ y que $\ln e = 1$.

Para **calcular un número conociendo su logaritmo** se emplean las mismas teclas utilizando previamente la tecla de función inversa (normalmente *SHIFT* o *INV*).



Ejemplos:

- Comprueba con tu calculadora que el número cuyo logaritmo decimal vale 1,36 es 22,9 y que el número cuyo logaritmo neperiano vale 1,36 es 3,896.

2.1.3. Cambio de base de logaritmos

Con la calculadora también se pueden calcular logaritmos que no sean decimales ni neperianos, es decir, en bases distintas a "10" y "*e*".

Para ello se emplea la **fórmula del cambio de base**:

Para cambiar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplo:

- Para calcular log_4 7 utilizando la calculadora hacemos $\log_4 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4} = \dfrac{0{,}845}{0{,}602} = 1{,}40$

Actividades propuestas

11. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base, y compara los resultados con los obtenidos en la actividad:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0{,}125$ f) $\log_3 \dfrac{1}{9}$.

2.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos son las siguientes:

- $\mathbf{\log_b 1 = 0}$ ya que $b^0 = 1$ (el logaritmo de 1 en cualquier base es 0)
- $\mathbf{\log_b b = 1}$ ya que $b^1 = b$ (el logaritmo de la base es 1)

- El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$$

- El logaritmo de un **cociente** es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$$

- El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$$

Ejemplo:

a) $\log_2 10 + \log_2 3{,}2 = \log_2 (10 \cdot 3{,}2) = \log_2 32 = 5$

b) $\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

c) $\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

d) $\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \dfrac{1}{5} \log_3 9 = \dfrac{1}{5} \cdot 2 = \dfrac{2}{5}$.

2.2.1. Expresiones logarítmicas y algebraicas

Las propiedades de los logaritmos se emplean en dos tipos importantes de operación:

- **Tomar logaritmos** en una igualdad es aplicar el logaritmo a ambos miembros de la misma:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmos** en una igualdad es lo contrario: conseguir que una expresión logarítmica deje de serlo. Para esto es necesario que cada miembro tenga un único logaritmo:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Actividades resueltas

- Sabiendo que log 2 = 0,301, calcula:

a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0{,}301 = 1{,}505$

b) $\log 0{,}008 = \log (8/1000) = \log 8 - \log 1000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0{,}301 - 3 = -2{,}097$

Observa que el logaritmo en base 10 de la unidad seguida de ceros es igual al número de ceros que tenga.

- Sabiendo que log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula:

a) $\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

b) $\log 180 = \log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2\log 3 + \log 2 + \log 10 = 2 \cdot 0{,}477 + 0{,}301 + 1 = 2{,}255$

c) $\log 15 = \log(3 \cdot 5) = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$

- Toma logaritmos y desarrolla:

a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$

b) $a = \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina los logaritmos:

a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$

b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - 3 \log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log \sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2 \log b - \dfrac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1000a) = \log \dfrac{b^2}{\sqrt[3]{c}} \Rightarrow$

$1000a = \dfrac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resuelve la siguiente **ecuación logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solución:

Para resolverla es preciso eliminar logaritmos:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

La ecuación queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 2/3$.

La segunda solución no es válida porque al sustituirla en la ecuación original quedaría log (x – 1) como logaritmo de un número negativo, que no existe. Esto ocurre a veces en las ecuaciones logarítmicas, igual que en las ecuaciones irracionales, y por ello es necesario comprobar la validez de las soluciones halladas.

- En el cálculo de **interés compuesto** el interés producido cada periodo de tiempo pasa a formar parte del capital. Así, si el periodo de tiempo es un año, la fórmula del interés cada año se calcula sobre un nuevo capital, que es el capital anterior más los intereses producidos en el año. Por tanto, si el porcentaje de interés anual es r, el capital cada año se multiplica por $1 + \dfrac{r}{100}$.

  Por ejemplo si el interés es del 4 % hay que multiplicar por 1,04 cada año transcurrido.

  La fórmula del capital acumulado al cabo de n años es: $C_n = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n$

  Calcula el capital final acumulado al cabo de 4 años para 6.000 € al 2 % de interés compuesto anual.

Solución:

$C = 6000 \cdot (1 + 0{,}02)^4 = 6000 \cdot 1{,}02^4 = 6.494{,}59$ €.

- ¿A qué interés compuesto hay que invertir 10.000 euros para obtener en 10 años al menos 16.000 euros?

Solución:

$$16.000 = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1{,}6 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[10]{1{,}6} = 1{,}048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}048$$

Así pues r = 4,8 %.

- Cuando la incógnita es el número de años (que está en el exponente) necesitamos tomar logaritmos para resolverlo: Si ingresamos en un banco 3.000 € al 4 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años tienen que pasar para conseguir 4.500 €?

Solución:

$4.500 = 3000 \cdot (1 + 0{,}04)^n \Rightarrow 1{,}5 = 1{,}04^n \Rightarrow \log 1{,}5 = n \log 1{,}04 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} = 10{,}34$ años

(tendremos que esperar 11 años).

- La fórmula del interés compuesto también se utiliza para los problemas de **crecimiento o decrecimiento de poblaciones**, que es una función exponencial: Por ejemplo, si la población de un país aumenta un 3 % cada año y actualmente tiene 15 millones de habitantes, ¿cuántos tendrá al cabo de 5 años?

La solución es:

$$15.000.000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 15.000.000 \cdot 1{,}03^5 = 17.383.111 \text{ habitantes.}$$

Actividades propuestas

12. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$ y que $\log 3 = 0{,}477$ calcula:

a) $\log 5$ b) $\log 25$ c) $\log 24$ d) $\log 60$

13. Sabiendo que $\log 8 = 0{,}903$, y sin utilizar calculadora, halla los siguientes:

a) $\log 80$ b) $\log 2$ c) $\log 64$ d) $\log 0{,}8$ e) $\log 1{,}25$ f) $\log \sqrt[3]{800}$

14. Toma logaritmos y desarrolla:

a) $A = \dfrac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \dfrac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Reduce a un único logaritmo cada expresión:

a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$ b) $2 \log 5 + \dfrac{1}{2} \log 5 - 2$ c) $2 \log 2a - \log a$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log (x + 1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log (7 - 3x) - \log (1 - x) = \log 5$

17. Cuando nació un niño sus padres colocaron 1.000 euros en una libreta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendrá la cuenta cuando el niño cumpla 15 años?

18. La población de ciertas bacterias se multiplica por 1,5 cada día. Si al comienzo hay 18 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de una semana?

19. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto hay que invertir un capital de 20.000 euros para ganar 1.000 euros en tres años?

20. Si invertimos 7.000 euros al 1,35 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años deben transcurrir para haber ganado al menos 790 euros?

21. Calcula en cuántos años se duplica una población que crece al ritmo del 10 % anual.

22. Si una población de 8 millones de habitantes se ha convertido en 15 millones en 7 años, ¿cuánto ha crecido cada año? (*Ojo*: ¡no se trata de dividir entre 7!).

2.3. Funciones logarítmicas

2.3.1. Gráfica y características

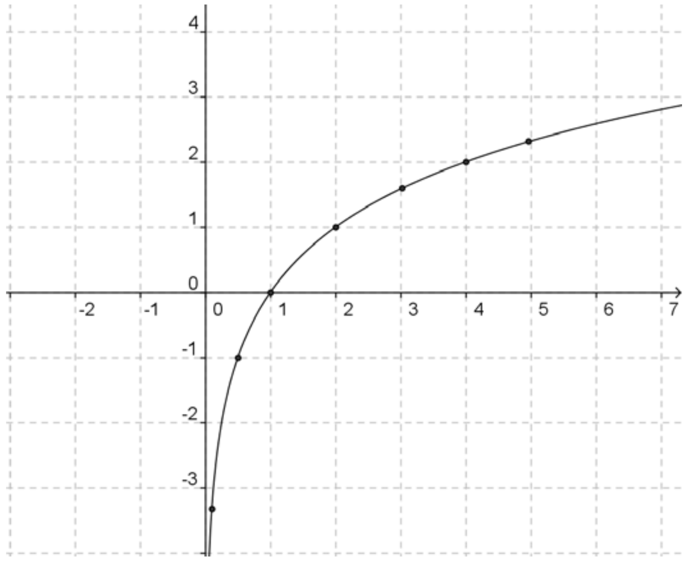
Las funciones logarítmicas son las del tipo $y = \log_b x$.

Hay una función distinta para cada valor de la base *b*.

Ejemplos:

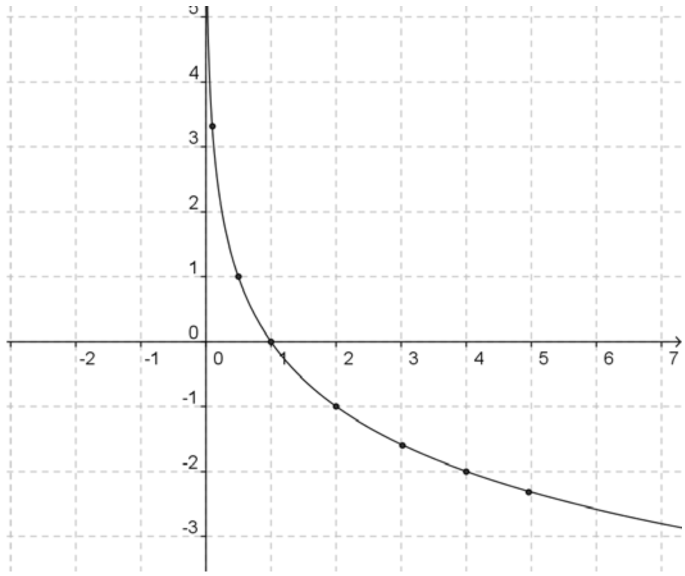
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

x	$\log_2 x$
0,1	-3,3
0,5	-1,0
0,7	-0,5
1	0,0
2	1,0
3	1,6
4	2,0
5	2,3
…	…



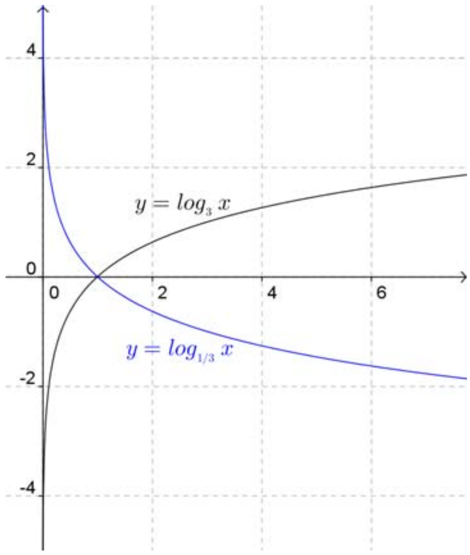
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_{1/2} x$ son las siguientes:

x	$\log_{1/2} x$
0,1	3,3
0,5	1,0
0,7	0,5
1	0,0
2	-1,0
3	-1,6
4	-2,0
5	-2,3…
…	



Las características de estas gráficas nos permiten deducir las de las funciones logarítmicas en general, que son las siguientes:

- Su **dominio** es (0, +∞). Es decir, solo están definidas para "x" positivo.
- Son continuas.
- Su **recorrido** es toda la recta real.
- Pasan por los puntos (1, 0), (b, 1) y (1/b, –1).
- La gráfica de $y = \log_b x$ y la de $y = \log_{1/b} x$ son simétricas respecto del eje OX.



Por otra parte observamos unas características propias en las funciones en ambas ilustraciones, según sea la base del logaritmo mayor o menor que la unidad.

Cuando la base es b > 1:

- Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a –∞. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte negativa del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

Cuando la base es 0 < b < 1:

- Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a +∞. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte positiva del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

2.3.2. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Según la definición del logaritmo tenemos la siguiente relación: $y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$

Las funciones logarítmica y exponencial llevan intercambiado el lugar de la "x" y la "y". Por tanto son **funciones inversas**.

En consecuencia, si partimos de un número y le aplicamos la función logarítmica, y luego al resultado le aplicamos la función exponencial volvemos al número de partida. Lo mismo ocurre si primero aplicamos la función exponencial y después la logarítmica.

Ejemplo:

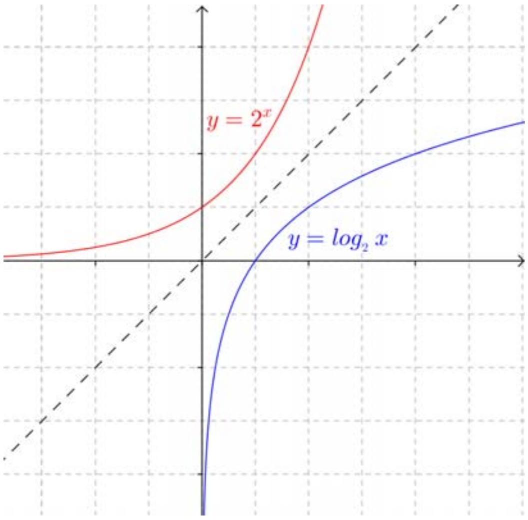
- Partiendo del número 3, utilizando la calculadora aplicamos una función logarítmica: $\log_5 3 = 0{,}6826$ (recuerda la fórmula de cambio de base). A continuación aplicamos la función exponencial: $5^{0{,}6826} = 3$ y obtenemos el número del principio.
- Haciéndolo en sentido inverso, partiendo del número 3 aplicamos primero una función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación aplicamos la función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ y también hemos obtenido el número del principio.

Cuando dos funciones son inversas sus gráficas son **simétricas**, siendo su eje de simetría la bisectriz del primer cuadrante.

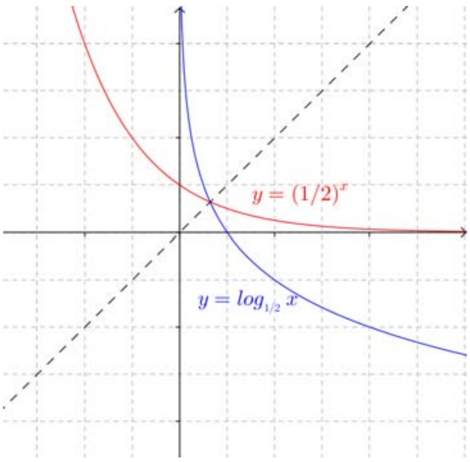
Esto se debe a que si el punto (*a*, *b*) es de la gráfica de una de ellas, el punto (*b*, *a*) pertenece a la gráfica de la otra.

Ejemplos:

- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ tienen la siguiente simetría:



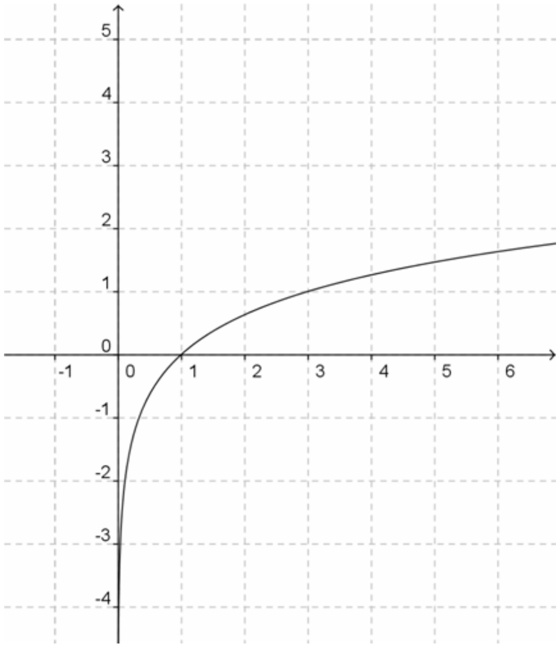
- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_{1/2} x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tienen la siguiente simetría:



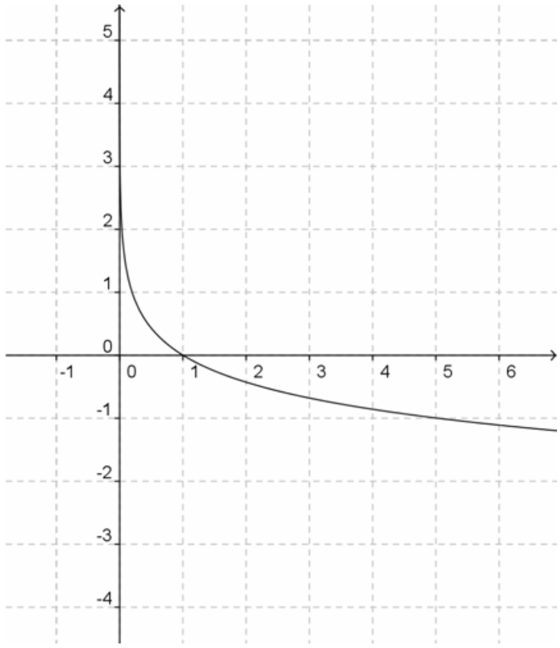
Actividades resueltas

- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas son funciones logarítmicas porque pasan por el punto (1, 0) y tienen como asíntota vertical el eje OY (bien sea en su parte positiva o negativa) y por el otro lado tienden a ∞.

La función (a) es $y = \log_3 x$ porque pasa por el punto (3, 1) y por (1/3, –1).

La función (b) es $y = \log_{1/5} x$ porque pasa por el punto (5, –1) y por (1/5, 1).

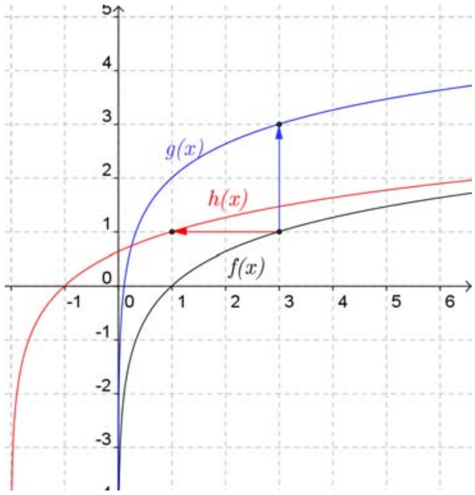
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = \log_3 x + 2$ y $h(x) = \log_3(x+2)$.

Solución:

La función $g(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia arriba 2 unidades.

La función $h(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia la izquierda 2 unidades.

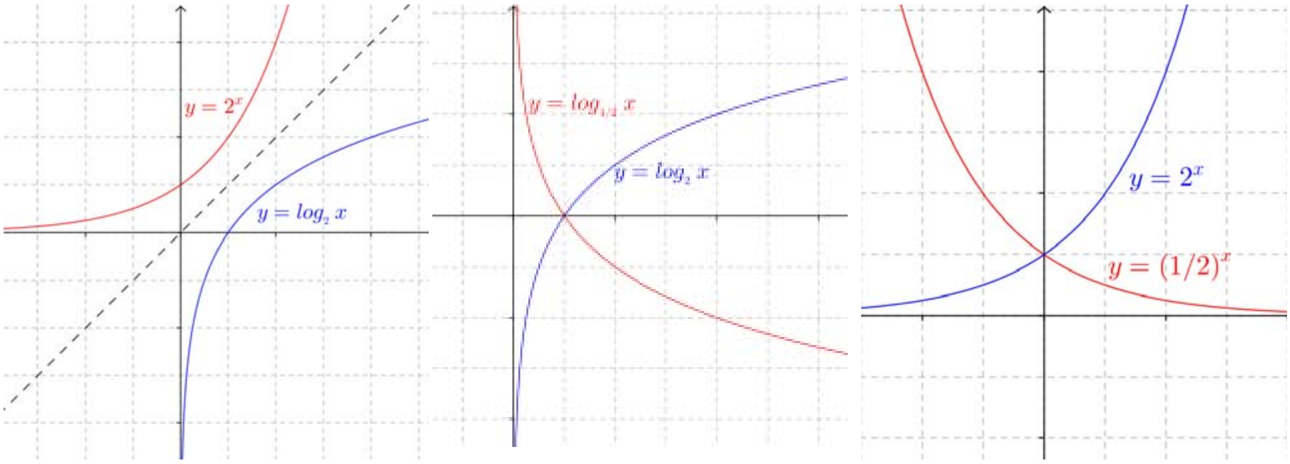
Por tanto sus gráficas son estas:



- Representa la función $y = \log_2 x$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, y utilizando también $y = 2^x$ representa $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución:

Por la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante: | Por la simetría respecto al eje OX: | Por la simetría respecto al eje OY:



Actividades propuestas

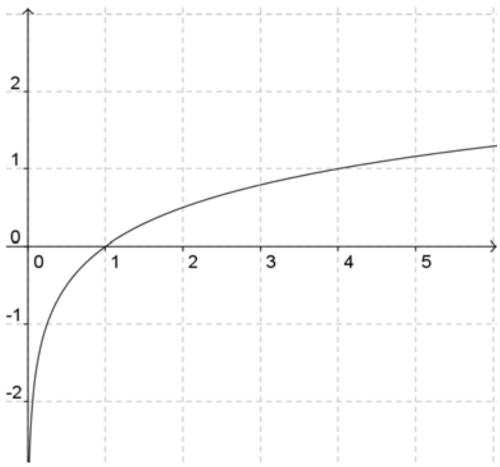
23. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

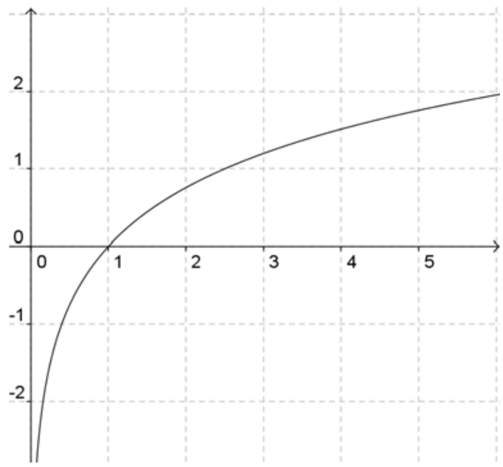
Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (*b*, 1) y (1/*b*, –1).

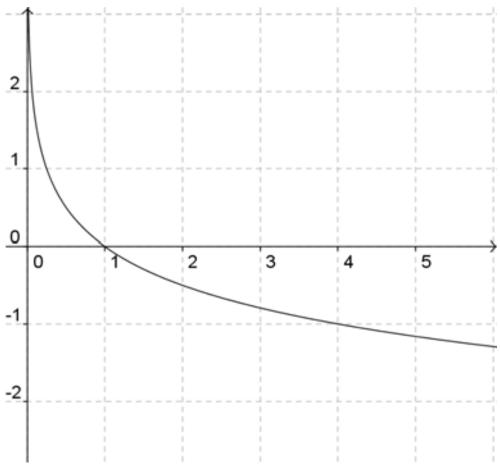
24. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

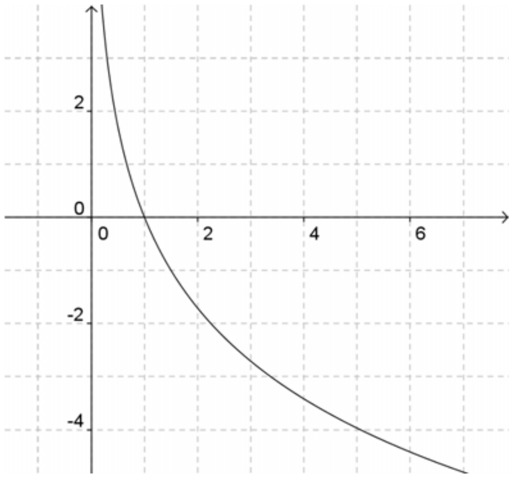
a)



b)



c) 

d) 

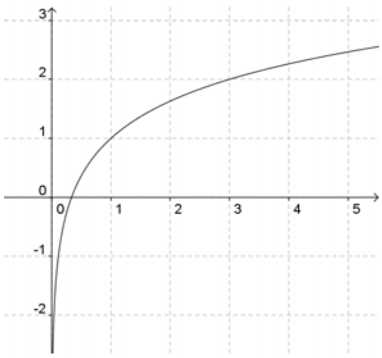
25. Repite en tu cuaderno el dibujo de la función $f(x) = \log_2 x$ representada en el ejercicio 23. Después piensa qué desplazamiento sufren respecto a ella las funciones siguientes y represéntalas en la misma gráfica sin hacer tablas de valores:

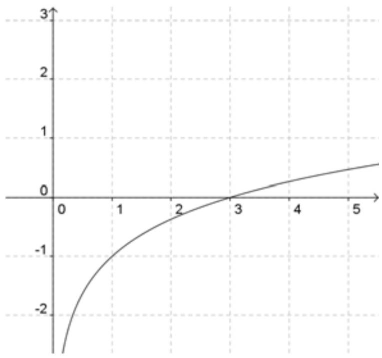
a) $g(x) = \log_2 x + 3$ b) $h(x) = \log_2 x - 3$ c) $i(x) = \log_2 (x+3)$ d) $j(x) = \log_2 (x-3)$

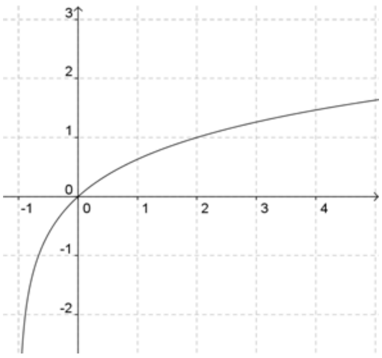
26. Haz el mismo proceso del ejercicio anterior con las funciones siguientes:

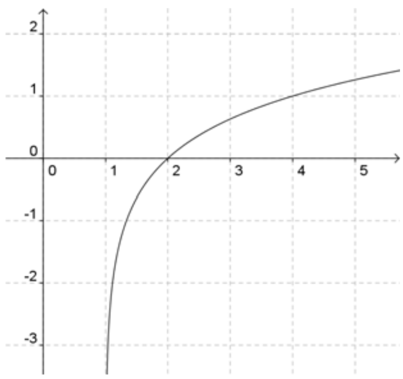
a) $g(x) = \log_2 x + 2$ b) $h(x) = \log_2 x - 2$ c) $i(x) = \log_2 (x+2)$ d) $j(x) = \log_2 (x-2)$

27. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

a) 

b) 

c) 

d) 

28. Representa en tu cuaderno la función y = 3^x usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{1/3} x$.

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el capítulo 7 has estudiado Trigonometría, por lo que ya conoces las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Ahora vamos a estudiar las funciones trigonométricas y sus propiedades.

Recuerda que:

Un radian se define como la medida del ángulo central cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Por tanto:

360º equivalen a 2π radianes

De donde se deduce que:

180º equivalen a π radianes

90º equivalen a π/2 radianes …

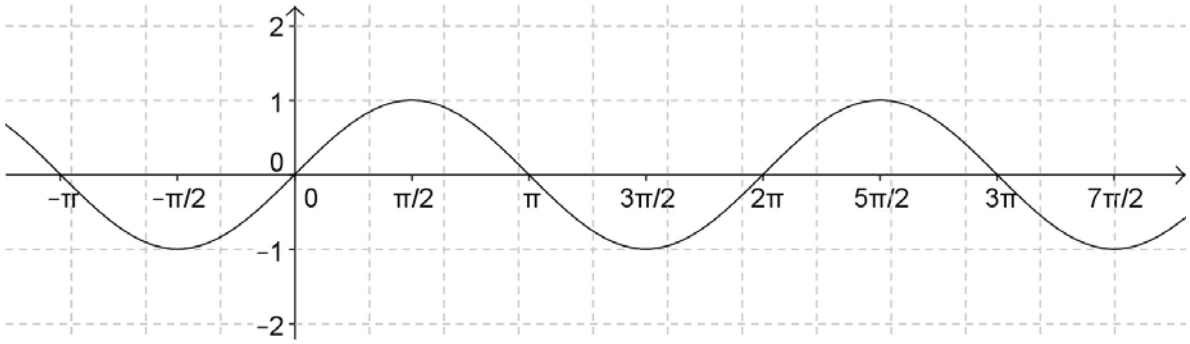
3.1. Las funciones seno y coseno

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

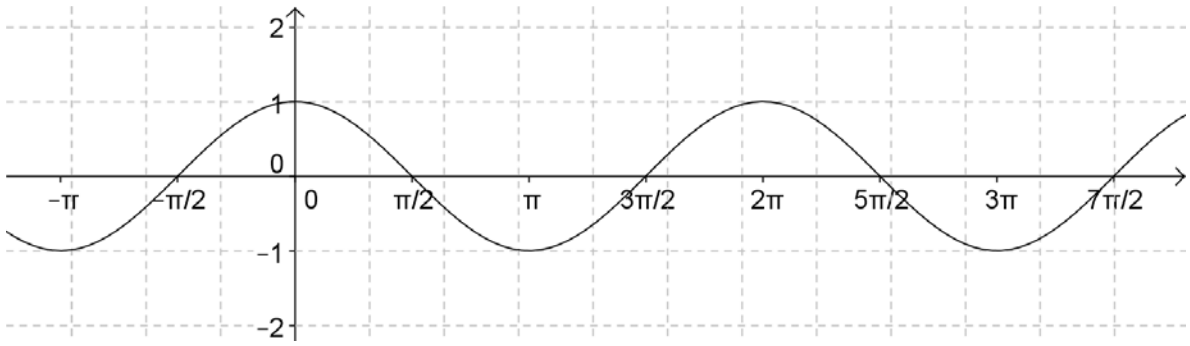
Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

Gráfica de la función $f(x)$ = sen x



Gráfica de la función $f(x)$ = cos x



Ya sabes cuánto vale π, π = 3,14…. Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.

Propiedades de estas funciones:

- Ambas son periódicas y el valor de su período es 2π.

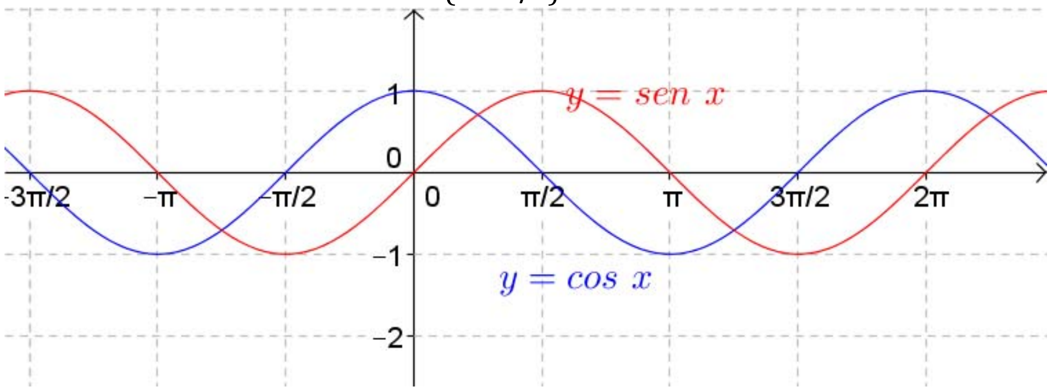
$$sen\ (x + 2\pi) = sen\ x \qquad\qquad cos\ (x + 2\pi) = cos\ x$$

- Son funciones continuas en todo su dominio.
- Su dominio son todos los números reales.
- Su recorrido es el intervalo [–1 , 1].

- La función seno tiene simetría impar (simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, *sen x* = − *sen* (−*x*)) y la función coseno tiene simetría par (simétrica respecto del eje OY, es decir, *cos x* = *cos* (−*x*)).
- Ambas funciones tienen la misma gráfica pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido horizontal.

  Es decir:

sen (*x* + π/2) = cos *x*

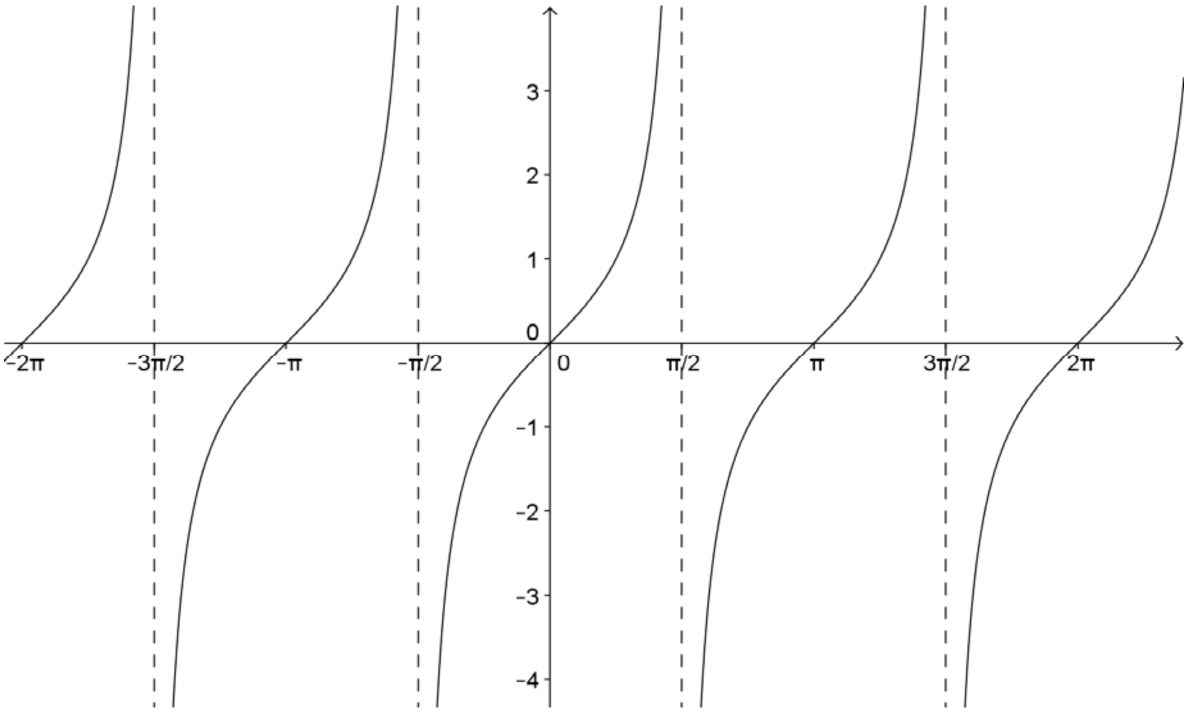


3.2. La función tangente

Esta función es diferente a las otras dos. Por esa razón la presentamos separadamente.

Ya sabes que como razones trigonométricas: tg x = sen x/ cos x.

La gráfica de la función *f(x)* = *tg x* es la siguiente:



Recordamos en primer lugar que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

Las propiedades de esta función son las siguientes:

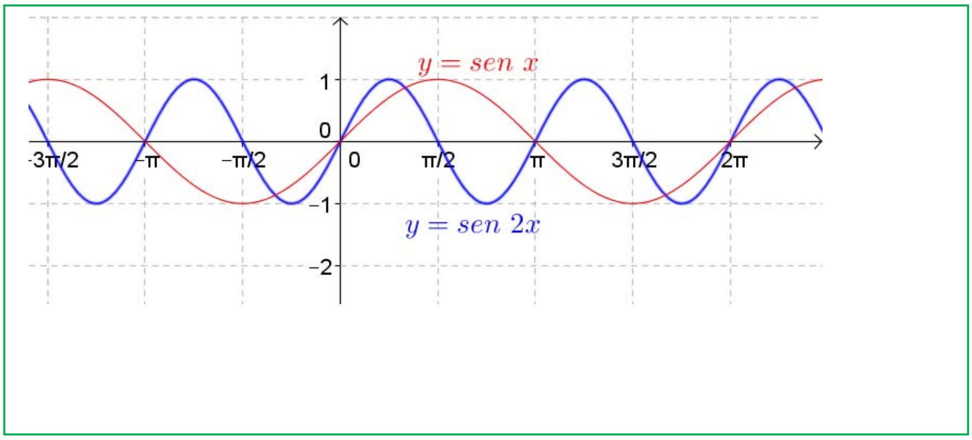
- Es una función periódica y el valor de su período es ahora menor, es π: tg $(x+\pi) = \text{tg } x$.
- Su dominio son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), donde no existe. En esos valores presenta discontinuidades llamadas discontinuidades *inevitables*, porque no se podrían "taponar" mediante un punto.
- Tiene asíntotas verticales en esos mismos valores de la x. Las hemos representado en el gráfico mediante líneas discontinuas.
- Tiene simetría impar: es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que tg (x) = – tg (–x)

Actividades resueltas

- Representa las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(2x)$ e $y = 2\text{sen } x$ comparándolas después con la gráfica de $y = \text{sen } x$.

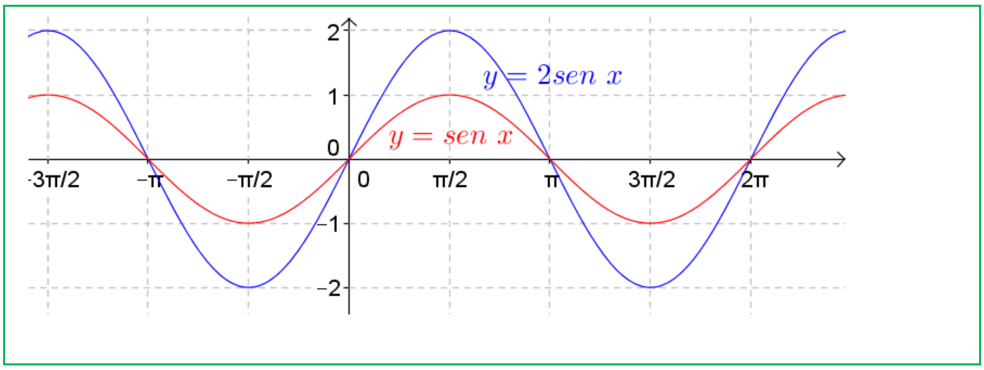
Solución:

Dando valores con la calculadora obtenemos las siguientes gráficas, representadas en azul junto a la de la función sen x, representada en rojo:



La gráfica de $y = \text{sen}(2x)$ es igual a la de $y = \text{sen } x$ contrayéndola horizontalmente. Cambia el periodo, que ahora es de π.

La gráfica de $y = 2\text{sen } x$ es igual a la de $y = \text{sen } x$ expandiéndola verticalmente. Tienen el mismo periodo, pero cambia la amplitud. Cuando $y = \text{sen } x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 1, $y = 2\text{sen } x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 2. Decimos que su amplitud vale 2.



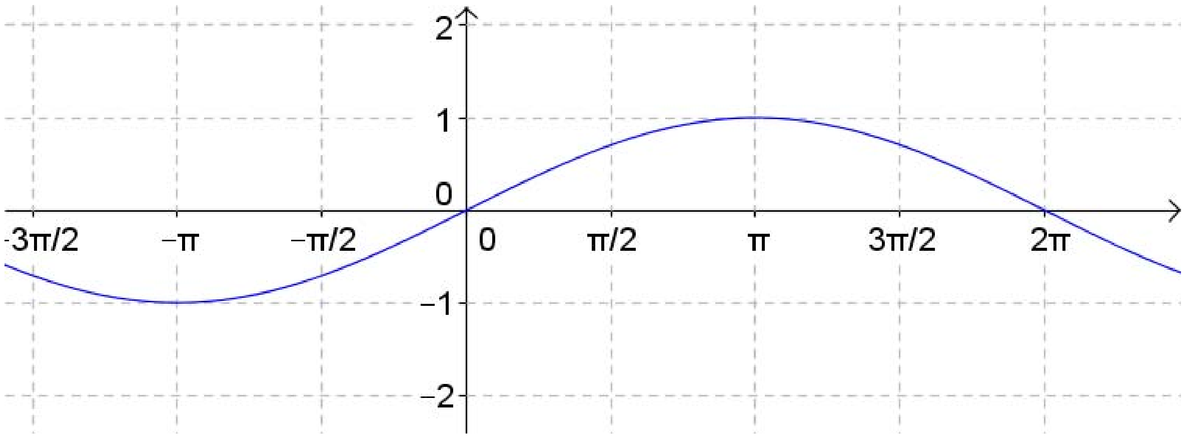
Actividades propuestas

29. Representa en tu cuaderno las gráficas de las funciones $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparándolas después con la gráfica de $y = \cos x$.

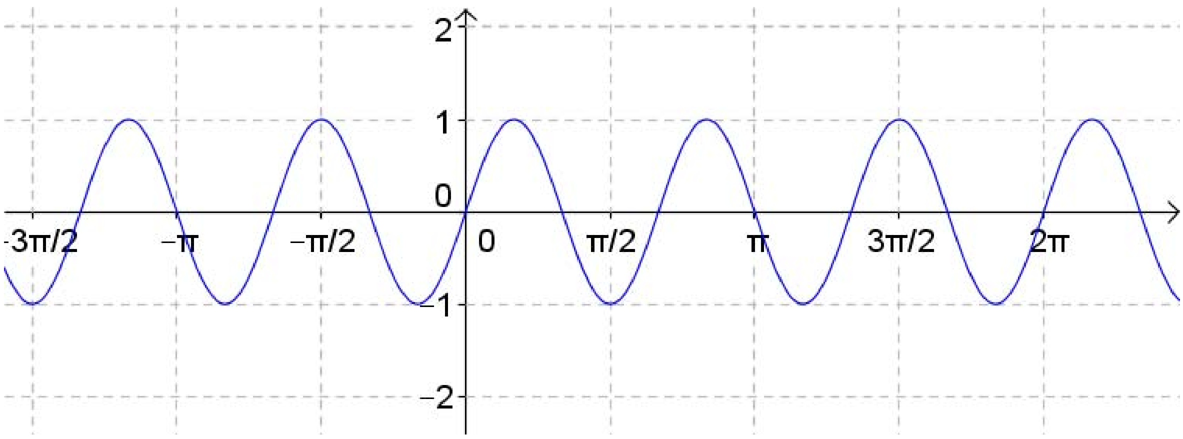
30. Partiendo de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, representa en tu cuaderno, sin hacer tablas de valores, las gráficas de $y = 1 + \operatorname{sen} x$ y de $y = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$.

31. Identifica las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas:

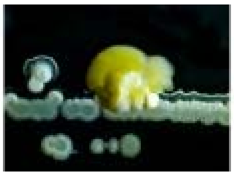
a)



b)



CURIOSIDADES. REVISTA



Las poblaciones crecen exponencialmente

En los modelos que se utilizan para estudiar las poblaciones se utiliza la función exponencial. Se supone que una población de una cierta especie crece exponencialmente mientras tenga alimento suficiente y no existan depredadores. Llega un momento en el que la población ha llenado el territorio (la Tierra es finita) y entonces cambia la función que se utiliza, estabilizándose el crecimiento.

Esto permite estudiar el crecimiento de las bacterias que se reproducen por fisión binaria, o el crecimiento de las células del feto, o la población de conejos cuando llegaron a Australia... Malthus afirmó que si la población humana crecía de forma exponencial y la producción de alimentos crecía de forma lineal habría graves hambrunas.

Logaritmos

No hace tanto tiempo no existían las calculadoras. Para calcular logaritmos se usaban "tablas". Había unas tablas de logaritmos que eran un libro con un lomo de unos tres dedos de ancho. Se usaban en problemas de Astronomía en los que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolverlos y se usaban números con muchas cifras decimales (más de 10). ¡Imaginas lo que es multiplicar o dividir números con esas cifras decimales! Resultaba muy conveniente transformar las multiplicaciones e sumas y las divisiones en restas. Esta misma idea la que llevó a John Napier (o Neper) a inventar l logaritmos.

No todo lo puedes calcular con calculadora.

Utiliza tu calculadora para calcular 45^{79}. Verás que da *error*. Pero si usas logaritmos puedes calcularlo fácilmente.

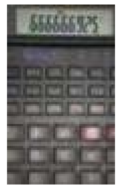
$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130{,}6037886 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{130} \cdot 10^{0{,}6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0{,}6037886} = 4{,}016 \Rightarrow$$

$$Y = 45^{79} = 4{,}016 \cdot 10^{130}.$$



Decrecimiento exponencial

Muchos fenómenos se modelan con funciones exponenciales de base menor que 1, como

- La desintegración de átomos de una sustancia radiactiva.
- La intensidad luminosa de un haz de luz
- La probabilidad de supervivencia de ciertas especies que no tienen genéticamente determinado el envejecimiento celular

Carbono 14

El carbono 14 es un isótopo radiactivo con un periodo de semi-desintegración (vida media) de 5568 años, muy utilizado para datar restos orgánicos. Las plantas, por fotosíntesis, y los animales por ingestión incorporan el carbono en la misma proporción que existe en la atmósfera, y al morir el ser vivo empieza el proceso de desintegración.

Sophia Kovalevkaya

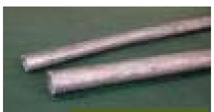
Conocemos muy bien muchas anécdotas de la vida de Sophia (o Sonia como a ella le gustaba que la llamaran), una mujer matemática con teoremas con su nombre, porque escribió su biografía en un precioso libro llamado "*Una infancia en Rusia*"

Cuando Sophia tenía 14 años, su familia recibió la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un vecino profesor de física, que dejó a la familia una copia de su nuevo libro sobre esta materia. Sonia comenzó a estudiarlo y se quedó atascada al llegar a la sección de óptica en la que se utilizaban razones trigonométricas que no había visto nunca. Entonces fue directamente a Tyrtov a preguntarle qué era exactamente un *seno*, pero él, sin hacerle demasiado caso, le contestó que no lo sabía. De modo que Sonia comenzó a analizar y a explicar lo que era un seno partiendo de las cosas que ya conocía llegando a sustituirlo por el arco, que, dado que las fórmulas que trataba el libro se aplicaban en ángulos muy pequeños, lo aproximaban bastante bien. La siguiente vez que Tyrtov fue de visita a la casa, Sonia le pidió que discutieran sobre su libro y él, tras intentar cambiar de tema, concluyó que lo encontraba demasiado difícil para ella. Sonia le comentó que el texto no había tenido ninguna dificultad para ella, e incluso le explicó cómo había ido deduciendo todo aquello que no conocía y que se utilizaba en el libro. Tyrtov quedó estupefacto y le comentó al padre de Sonia que su desarrollo sobre el concepto de seno había sido exactamente el mismo con el que históricamente se había introducido tal concepto en las Matemáticas.

Fourier y el concepto de función

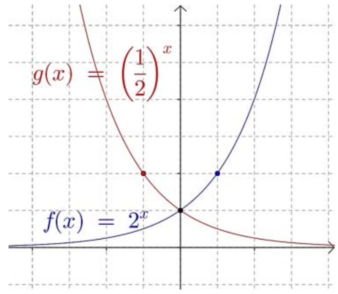
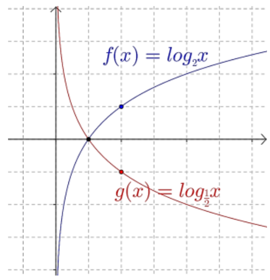
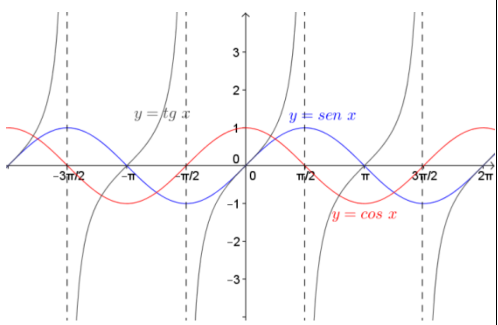
El concepto de función ha tardado mucho en ser comprendido incluso por los matemáticos, sólo dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer.

Fue *Joseph Fourier* en su obra *"La teoría analítica del calor"* el motor para la profundización del concepto de función. Fourier vivió durante la Revolución Francesa y participó en la expedición de Napoleón a Egipto. Era muy friolero y por ese motivo le interesaba la propagación del calor. En su obra afirma que "toda" función podía escribirse como una suma infinita de funciones seno y coseno.



Antoni Zygmund escribió *"Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por matemáticos trabajando sobre series trigonométricas"*. Añade que esa obra de Fourier fue el catalizador para fijar el concepto de función, la definición de integral, profundizar en la Teoría de Conjuntos y actualmente con la Teoría de Funciones Generalizadas o Distribuciones.

RESUMEN

		Ejemplos
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos los números reales. Recorrido: Todos los números reales positivos. Continua en todo el dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1$, $\Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(0 , 1)$, $(1 , b)$, $(-1 , 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementales: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \dfrac{\log 7}{\log 4} = 1{,}40$
Operaciones con logaritmos	Log. de un producto: $\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ Log. de un cociente: $\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$ Log. de una potencia: $\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$	$\log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: T Todos los números reales positivos. *Recorrido*: Todos los números reales. **Continua** en todo el dominio Asíntota vertical: x=0 $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(1 , 0)$, $(b , 1)$, $(1/b , -1)$	
Funciones trigonométricas $y = \text{sen } x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg } x$	**<u>Funciones seno y coseno</u>:** *Dominio*: Todos los números reales *Recorrido*: $[-1 , 1]$ Continuas en todo el dominio. Periódicas de período 2π **<u>Función tangente</u>:** *Dominio y continuidad*: Todo $\Re$ salvo $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En esos valores hay asíntotas verticales) *Recorrido*: Todos los números reales. Periódica de periodo π. **<u>Simetría</u>:** Funciones seno y tangente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Función exponencial

1. Representa mediante una tabla de valores las siguientes funciones:

a) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y=2^{x/2}$ d) $y=3^{-2x}$

2. Representa mediante una tabla de valores la función $y=3^x$ y a continuación, sin tabla de valores, representa estas otras sobre el mismo dibujo:

a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

3. Encuentra una función exponencial $f(x)=b^x$ sabiendo que $f(2)=9$.

4. Encuentra una función $f(x)=k{\cdot}b^x$ sabiendo que $f(4)=48$ y que $f(0)=3$.

5. Si un capital de 3.500 euros se multiplica cada año por 1,02 representa en un gráfico la evolución de ese capital en los 10 primeros años. Escoge unas proporciones adecuadas para los ejes.

6. Cierto tipo de células se reproduce por bipartición, comprobándose que el número de ellas se duplica cada día. Si en un día determinado el número de células era de 4 millones:

a) Expresa mediante una función el número de células en función del número de días.

b) Halla el número de células que habrá dentro de 3 días y el que había hace 3 días.

c) ¿En qué día piensas que el número de células era de 31.250?

7. La descomposición de cierto isótopo radiactivo viene dada por la fórmula $y = y_0{\cdot}2{,}7^{-0{,}25t}$, donde y_0 representa la cantidad inicial y t el número de milenios transcurrido. Si la cantidad actual es de 50 gramos, ¿cuál será la cantidad que quede al cabo de 8.000 años? ¿Cuál era la cantidad que había hace 5.000 años?

Función logarítmica

8. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición y sin utilizar la calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0{,}2$ f) $\log$ $0{,}1$

9. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes, sin calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0{,}125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0{,}333...$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1000}$

10. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0{,}1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1000}$

11. Utilizando los valores log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Llamando log 9 = *x* expresa en función de *x* los siguientes logaritmos:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0,\hat{1}$ d) $\log 0,9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2 \log x = \log (10 - 3x)$

b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

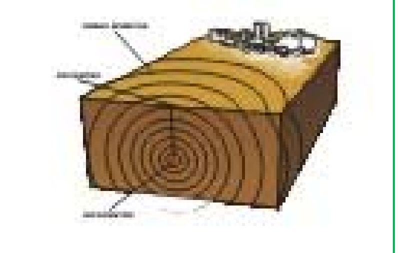
c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log (x^2 - 1) = \log 2$

d) $\log x + \log(x + 15) = 2$

14. ¿Qué relación hay entre el logaritmo de un número *x* y el de su inverso 1/*x*?

15. Si se multiplica por 36 el número *x*, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es dicha base?

16. La *escala Richter*, usada para medir la intensidad de los terremotos, es una escala logarítmica: un terremoto de magnitud 5 es 100 veces más intenso que uno de magnitud 3, porque 5 = log 100.000 y 3 = log 1.000. Teniendo esto en cuenta, si el famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tuvo una magnitud de 8,2 y el de Haití (en 2010) fue de 7,2 ¿cuántas veces más fuerte fue uno que otro?



Terremoto

Funciones trigonométricas

17. Determina todos los ángulos que verifican que $sen\ x = 1/2$.

18. Determina todos los ángulos que verifican que $sen\ x = -1/2$.

19. Determina todos los ángulos que verifican que $cos\ x = 1/2$.

20. Determina todos los ángulos que verifican que $cos\ x = -1/2$.

21. Determina todos los ángulos que verifican que $tg\ x = -1$.

22. Calcula $sen\ x$ y $cos\ x$ si $tg\ x = -3$.

23. Calcula $sen\ x$ y $tg\ x$ si $cos\ x = 0,4$.

24. Calcula $tg\ x$ y $cos\ x$ si $sen\ x = -0,3$.

25. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos expresados en radianes siguientes:

a) $17\pi/3$, b) $-20\pi/3$, c) $13\pi/2$, d) $-9\pi/2$.

26. Dibuja en tu cuaderno sobre unos mismos ejes las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente e indica lo siguiente: a) Si el seno vale cero, ¿cuánto vale el coseno, y la tangente? b) Si el coseno vale cero, ¿cuánto vale el seno y la tangente? c) Si la tangente vale cero, ¿cuánto vale el seno y el coseno? d) Cuándo la tangente tiende a infinito, ¿cuánto vale el coseno?

27. Dibuja la gráfica de la función $y = sen(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(2x)$					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

28. Dibuja la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

29. Dibuja la gráfica de la función $y = 2sen((\pi/3)x) + \pi/2$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen((\pi/3)x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

30. Dibuja la gráfica de la función $y = 3sen(\pi x + 2)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x + 2)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?
b) ¿Cuál es su periodo?
c) ¿Cuál es su frecuencia?

31. Dibuja la gráfica de la función $y = cos(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(2x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

32. Dibuja la gráfica de la función $y = 3cos(\pi x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

33. Dibuja la gráfica de la función $y = 2cos(\pi x + 2)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x + 2)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

34. Dibuja la gráfica de la función $y = tg(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$tg(2x)$					
y					

¿Cuál es su periodo?

Problemas

35. Por efecto de un antibiótico el número de bacterias de una colonia se reduce en un 7 % cada hora. Si en el momento de administrarse el antibiótico había 40 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?

36. Una persona ingiere a las 8 de la mañana una dosis de 10 mg de medicamento. Dicho medicamento se va eliminando a través de la orina, y la cantidad que queda en el cuerpo al cabo de t horas viene dada por la fórmula $M(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$. Para que el medicamento haga efecto tiene que haber al menos una cantidad de 2 mg en el cuerpo. ¿Cuánto tiempo seguirá haciendo efecto después de su ingestión?

37. La medida de la presión atmosférica P (en milibares) a una altitud de x kilómetros sobre el nivel del mar está dada por la ecuación $P(x) = 1035 \cdot e^{-0{,}12x}$.

a) Si la presión en la cima de una montaña es de 449 milibares, ¿cuál es la altura de la montaña?

b) ¿Cuál será la presión en la cima del Everest (altitud 8.848 metros)?

38. ¿A qué tanto por ciento hay que invertir un capital para duplicarlo en 10 años?

39. ¿Cuántos años debe estar invertido un capital para que al 5 % de interés se convierta en 1,25 veces el capital inicial?

40. ¿Conoces esas muñecas rusas que llevan dentro otra muñeca igual pero de menor tamaño, y así sucesivamente? Supongamos que cada muñeca tiene dentro otra que ocupa 2/3 de su volumen. Si la muñeca mayor tiene un volumen de 405 cm^3 y la más pequeña es de 80 cm^3, ¿cuántas muñecas hay en total en la serie? ¿Podrías dar una fórmula general para este cálculo?

41. Indica, sin dibujar la gráfica, el periodo, la amplitud y la frecuencia de las funciones siguientes:

a) $y = 2\ sen\ (x/2)$, b) $y = 0{,}4\ cos\ (\pi x/2)$, c) $y = 5\ sen\ (\pi x/3)$, d) $y = 3\ cos\ (\pi x)$.

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de x que verifica la ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. La función exponencial y = e^x tiende a *** cuando x tiende a –∞ y a *** cuando x tiende a +∞. Indica con qué valores habría que rellenar los asteriscos:

a) 0, +∞ b) +∞, 0 c) 0, –∞ d) –∞, 0

3. Indica cuál es la función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. El valor de x que verifica $x = \log_2 1024$ es:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Otro valor

5. La ecuación logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ tiene como solución:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

6. Indica la afirmación verdadera:

a) La función exponencial de base mayor que 1 es decreciente

b) La función logarítmica de base mayor que 1 es decreciente

c) La función exponencial siempre es creciente

d) La función exponencial de base mayor que 1 es creciente

7. La expresión general de todos los ángulos cuya tangente vale 1, donde k es un número entero, es:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. La función $f(x) = 3\,sen(4x)$ tiene de amplitud, periodo y frecuencia, respectivamente:

a) 3, π/2, 2/π b) 4, π/3, 3/π c) 4, 3/π, π/3 d) 3, 2/π, π/2

9. El seno, el coseno y la tangente de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivamente:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1$

10. El seno, el coseno y la tangente de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1$