

## Algunos apuntes de Estadística de 4º (nivel avanzado)

### Coeficiente de correlación lineal

El **coeficiente de correlación lineal** es el cociente entre la **covarianza** y el producto de las **desviaciones típicas** de ambas variables.

El **coeficiente de correlación lineal** se expresa mediante la letra **r**.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

### Propiedades

1. El **coeficiente de correlación** no varía al hacerlo la escala de medición.

Es decir, si expresamos la altura en metros o en centímetros el coeficiente de correlación no varía.

2. El signo del **coeficiente de correlación** es el mismo que el de la **covarianza**.

Si la covarianza es positiva, la correlación es directa.

Si la covarianza es negativa, la correlación es inversa.

Si la covarianza es nula, no existe correlación.

3. El **coeficiente de correlación lineal** es un número real comprendido entre  $-1$  y  $1$ .

$$-1 \leq r \leq 1$$

4. Si el **coeficiente de correlación lineal** toma valores cercanos a  $-1$  la correlación es **fuerte e inversa**, y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime  $r$  a  $-1$ .

5. Si el **coeficiente de correlación lineal** toma valores cercanos a  $1$  la correlación es **fuerte y directa**, y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime  $r$  a  $1$ .

6. Si el **coeficiente de correlación lineal** toma valores cercanos a  $0$ , la correlación es **débil**.

7. Si  $r = 1$  ó  $-1$ , los puntos de la nube están sobre la recta creciente o decreciente. Entre ambas variables hay **dependencia funcional**.

### Ejemplos

Las notas de 12 alumnos de una clase en Matemáticas y Física son las siguientes:

Matemáticas	Física
2	1
3	3
4	2
4	4
5	4
6	4
6	6
7	4
7	6
8	7
10	9
10	10

Hallar el coeficiente de correlación de la distribución e interpretarlo.

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
2	1	2	4	1
3	3	9	9	9
4	2	8	16	4
4	4	16	16	16
5	4	20	25	16
6	4	24	36	16
6	6	36	36	36
7	4	28	49	16
7	6	42	49	36
8	7	56	64	49
10	9	90	100	81
10	10	100	100	100
<b>72</b>	<b>60</b>	<b>431</b>	<b>504</b>	<b>380</b>

1º Hallamos las **medias aritméticas**.

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{60}{12} = 5$$

2º Calculamos la **covarianza**.

$$\sigma_{xy} = \frac{431}{12} - 6 \cdot 5 = 5.92$$

3º Calculamos las **desviaciones típicas**.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{504}{12} - 6^2} = 2.45$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{380}{12} - 5^2} = 2.58$$

4º Aplicamos la fórmula del coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{5.92}{2.45 \cdot 2.58} = 0.94$$

Al ser el coeficiente de correlación positivo, la correlación es directa.

Como el coeficiente de correlación está muy próximo a 1 la correlación es muy fuerte.

Los valores de dos variables X e Y se distribuyen según la tabla siguiente:

Y/X	0	2	4
1	2	1	3
2	1	4	2
3	2	5	0

Determinar el coeficiente de correlación.

Convertimos la tabla de doble entrada en tabla simple.

$x_i$	$y_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$	$y_i \cdot f_i$	$y_i^2 \cdot f_i$	$x_i \cdot y_i \cdot f_i$
0	1	2	0	0	2	2	0
0	2	1	0	0	2	4	0
0	3	2	0	0	6	18	0

2	1	1	2	4	1	1	2
2	2	4	8	16	8	16	16
2	3	5	10	20	15	45	30
4	1	3	12	48	3	3	12
4	2	2	8	32	4	8	16
		20	40	120	41	97	76

$$\bar{x} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{41}{20} = 2.05$$

$$\sigma_x^2 = \frac{120}{20} - 2^2 = 2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{97}{20} - 2.05^2 = 0.65$$

$$\sigma_x = \sqrt{2} = 1.41$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.65} = 0.81$$

$$\sigma_{xy} = \frac{76}{20} - 2 \cdot 2.05 = -0.3$$

$$r = \frac{-0.3}{1.41 \cdot 0.81} = -0.26$$

Al ser el coeficiente de correlación negativo, la correlación es inversa.

Como el coeficiente de correlación está muy próximo a 0 la correlación es muy débil.

## Covarianza

La **covarianza** de una variable bidimensional es la media aritmética de los productos de las desviaciones de cada una de las variables respecto a sus medias respectivas.

La **covarianza** se representa por  $s_{xy}$  o  $\sigma_{xy}$ . ( $f_i$  representa la frecuencia absoluta de orden  $i$ ).

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_i x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

La **covarianza** indica el sentido de la correlación entre las variables

Si  $\sigma_{xy} > 0$  la correlación es directa.

Si  $\sigma_{xy} < 0$  la correlación es inversa.

La **covarianza** presenta como inconveniente, el hecho de que su valor depende de la escala elegida para los ejes.

Es decir, la **covarianza** variará si expresamos la altura en metros o en centímetros. También variará si el dinero lo expresamos en euros o en dólares.

## Ejemplos

Las notas de 12 alumnos de una clase en Matemáticas y Física son las siguientes:

Matemáticas	Física
2	1
3	3

4	2
4	4
5	4
6	4
6	6
7	4
7	6
8	7
10	9
10	10

Hallar la **covarianza** de la distribución.

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$
2	1	2
3	3	9
4	2	8
4	4	16
5	4	20
6	4	24
6	6	36
7	4	28
7	6	42
8	7	56
10	9	90
10	10	100
72	60	431

Después de tabular los datos hallamos las **medias aritméticas**:

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{60}{12} = 5$$

$$\sigma_{xy} = \frac{431}{12} - 6 \cdot 5 = 5.92$$

Los valores de dos variables X e Y se distribuyen según la tabla siguiente:

Y/X	0	2	4
1	2	1	3
2	1	4	2
3	2	5	0

Hallar la **covarianza** de la distribución.

En primer lugar convertimos la tabla de doble entrada en tabla simple y calculamos las medias aritméticas.

$x_i$	$y_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$y_i \cdot f_i$	$x_i \cdot y_i \cdot f_i$
0	1	2	0	2	0
0	2	1	0	2	0
0	3	2	0	6	0
2	1	1	2	1	2
2	2	4	8	8	16
2	3	5	10	15	30

4	1	3	12	3	12
4	2	2	8	4	16
		20	40	41	76
$\bar{x} = \frac{40}{20} = 2$			$\bar{y} = \frac{41}{20} = 2.05$		
$\sigma_{xy} = \frac{76}{20} - 2 \cdot 2.05 = -0.3$					

### Recta de regresión

La **recta de regresión** es la que mejor se ajusta a la **nube de puntos**.

La **recta de regresión** pasa por el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  llamado **centro de gravedad**.

### Recta de regresión de Y sobre X

La recta de regresión de Y sobre X se utiliza para estimar los valores de la Y a partir de los de la X.

La **pendiente** de la recta es el cociente entre la covarianza y la varianza de la variable X.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$$

### Recta de regresión de X sobre Y

La **recta de regresión** de X sobre Y se utiliza para estimar los valores de la X a partir de los de la Y.

La **pendiente** de la recta es el cociente entre la covarianza y la varianza de la variable Y.

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} (y - \bar{y})$$

Si la correlación es nula,  $r = 0$ , las rectas de regresión son perpendiculares entre sí, y sus ecuaciones son:

$$y = \bar{y}$$

$$x = \bar{x}$$

### Ejemplos

Las notas de 12 alumnos de una clase en Matemáticas y Física son las siguientes:

Matemáticas	Física
2	1
3	3
4	2
4	4
5	4
6	4
6	6
7	4
7	6
8	7

10                      9  
10                      10

Hallar las **rectas de regresión** y representarlas.

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
2	1	2	4	1
3	3	9	9	9
4	2	8	16	4
4	4	16	16	16
5	4	20	25	16
6	4	24	36	16
6	6	36	36	36
7	4	28	49	16
7	6	42	49	36
8	7	56	64	49
10	9	90	100	81
10	10	100	100	100
72	60	431	504	380

**1º** Hallamos las **medias aritméticas**.

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{60}{12} = 5$$

**2º** Calculamos la **covarianza**.

$$\sigma_{xy} = \frac{431}{12} - 6 \cdot 5 = 5.92$$

**3º** Calculamos las **varianzas**.

$$\sigma_x^2 = \frac{504}{12} - 6^2 = 6$$

$$\sigma_y^2 = \frac{380}{12} - 5^2 = 6.66$$

**4º** Recta de regresión de Y sobre X.

$$y - 5 = \frac{5.92}{6} (x - 6)$$

$$y = 0.987x - 0.922$$

**4º** Recta de regresión de X sobre Y.

$$x - 6 = \frac{5.92}{6.66} (y - 5)$$

$$x = 0.889y + 1.556$$

