Solución al valor máximo del producto de dos números

Enunciado:

Si $a>0, b>0$ tal que $a+b=1$, calcular el mayor valor de $a\cdot b$.

Solución:

Para mayor comodidad en la resolución gráfica y con derivadas de este problema llamemos ***x*** al valor de ***a*** e ***y*** al valor de ***b***.

Entonces tendremos: $x>0, y>0, x+y=1 \Rightarrow y=1-x$.

Primera forma de resolverlo (sin usar derivadas):

La función producto sería $P(x,y)=x\cdot y$, que se podría poner como $P(x)=x\cdot(1-x)=x-x^2$. Función que tiene un máximo en el punto que hemos de hallar.

Como se trata de una función cuadrática cóncava (ramas hacia abajo), tendrá un máximo en su vértice (x_v, y_v) de la función $P(x)$, siendo $x_v=-\frac{coef.\ de\ x}{2\cdot coef.\ de\ x^2}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$; con lo cual $y_v=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Por tanto el producto máximo es ¼ y se alcanza cuando $x=\frac{1}{2}=y$. O sea que **el mayor valor del producto de $a\cdot b$ es ¼**.

Ver el archivo de Geogebra al respecto (solución de forma gráfica). Enlace: https://www.geogebra.org/m/sjdqkrft

Segunda forma de resolverlo (usando derivadas):

Se procede igual que antes hasta considerar $P(x)=x-x^2$;

Hallamos los puntos críticos de dicha función polinómica: $P'(x)=1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (sólo hay uno).

Calculamos la segunda derivada de la función en dicho punto crítico: $P''(x)=-2 \Rightarrow P''\left(\frac{1}{2}\right)=-2<0$ (por tanto en dicho punto hay un máximo). El máximo se alcanza en el punto $x=\frac{1}{2}$ y vale $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Así pues, **el producto máximo de ambos es ¼** y como $x=\frac{1}{2}$, e $y=\frac{1}{2}$ se tiene $a=b=\frac{1}{2}$.