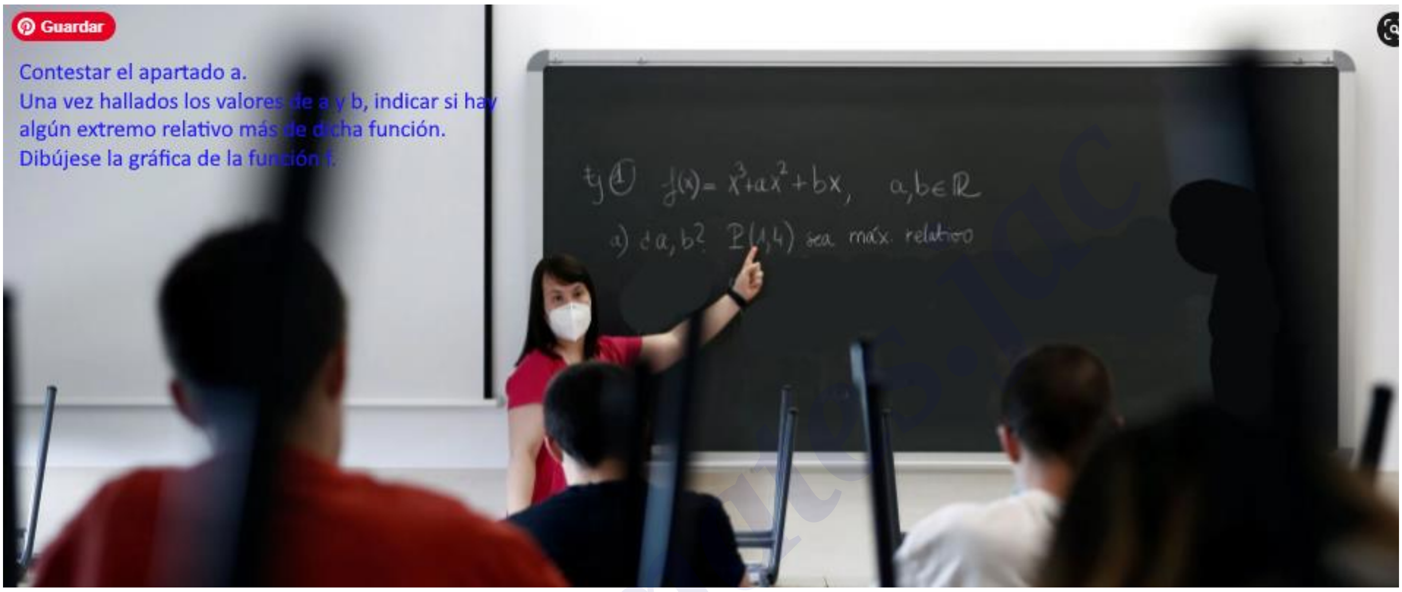
Solución al problema de “uno de máximos y mínimos para 2ºBach.”

Enunciado:



Solución:

Al tratarse de una función polinómica es derivable en todo su dominio y por tanto la derivada de la misma en un extremo relativo (máximo o mínimo local) ha de ser cero (condición necesaria pero no suficiente). Véase: [Puntos críticos I (educacion.es)]

O sea que $f'(1) = 0$ y además sabemos que $f(1) = 4$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b = 4 \Rightarrow a + b = 3$$

Resolvemos el sistema:

$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = 3 \end{cases}$, cuya solución es: $\boldsymbol{a = -6 \ y \ b = 9}$. Así que la función sería: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Veamos si tiene un máximo en el punto (1, 4).

Está claro que $f(1) = 4$.

Una condición suficiente para que tenga un máximo en dicho punto es que $f'(1) = 0 \ y \ f''(1) < 0$.

Ahora bien:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(1) = 3 - 12 + 9 = 0$$

Y $f''(x) = 6x - 12 \ \Rightarrow \ f''(1) = 6 - 12 < 0$.

Luego, efectivamente, en el punto (1, 4) presenta un máximo local o relativo.

Para ver si hay algún otro extremo relativo, resolvemos:

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 3x^2 - 12x + 9 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \ (ya\ visto) \end{cases}$$

Así que $x = 3$ también es un punto crítico o singular de la función f.

Y una condición suficiente para que tenga un mínimo en dicho punto es que $f'(3) = 0 \ y \ f''(3) > 0$.

Veámoslo:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \ \Rightarrow \ f'(3) = 27 - 36 + 9 = 0$$

Y $f''(x) = 6x - 12 \ \Rightarrow \ f''(3) = 18 - 12 > 0$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = 0$$

Luego, efectivamente, en el punto (3, 0) presenta un mínimo local o relativo.

No hay más extremos locales o relativos.

Para dibujar la gráfica de la función estudiar dicha función (dominio, rango, continuidad, derivabilidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, ver dónde es positiva y negativa, puntos de corte con los ejes, puntos de inflexión y finalmente hágase una tabla de valores).

Aquí pongo la representación gráfica de dicha función:

https://www.geogebra.org/m/aseuhkeg