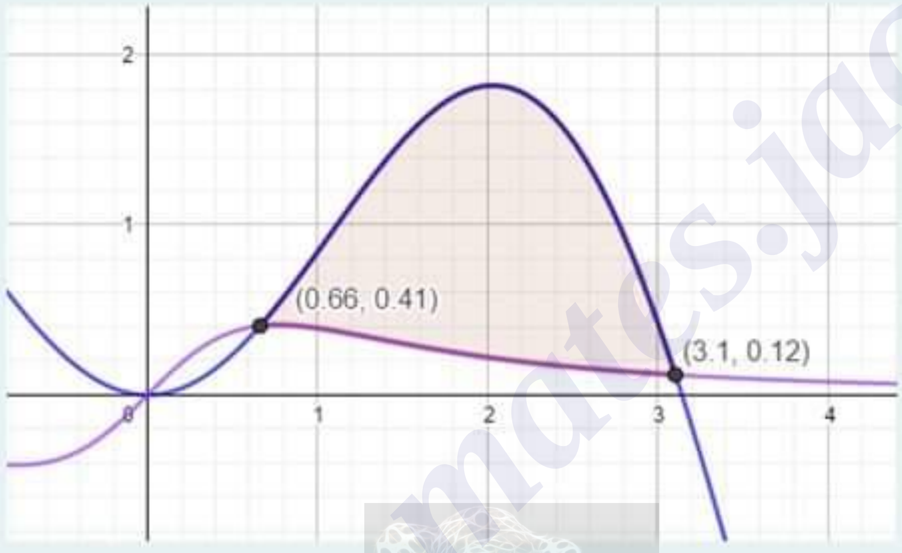
Solución al problema de "áreas entre dos curvas"

Enunciado:

Sea R la región limitada por las curvas

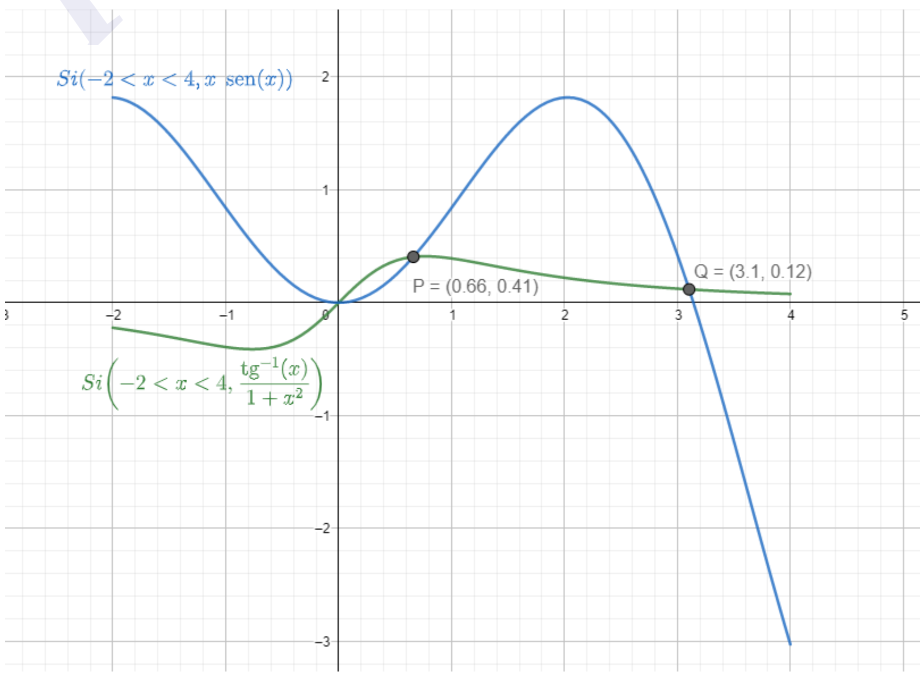
$$y = xsen(x), \quad y = \frac{arctan(x)}{1+x^2}$$

Halle el área de la región R que esta representado en la siguiente figura.



Solución:

Veamos de nuevo la gráfica (he cogido el dominio entre -2 y 4 pues es más que suficiente para hallar lo que nos piden).



La línea azul representa a la función $f(x) = x \cdot sen\ x$ y la línea verde a la función $g(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$ (una forma de verlo es evaluarlas en el punto 2, por ejemplo y ver sus respectivas ordenadas).

Observación: los puntos P y Q de intersección de ambas son aproximaciones que nos da el enunciado del ejercicio.

El área de la región buscada será la integral $\int_{0'66}^{3'1}(f(x) - g(x))\,dx = \int_{0'66}^{3'1} f(x)\,dx - \int_{0'66}^{3'1} g(x)\,dx$

Vamos a hacer ambas integrales:

Para ello necesito hallar una primitiva de cada función.

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot sen\ x\,dx$$

La hacemos por partes:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen\ x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

Aplicamos: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Por tanto: $\int x \cdot sen\ x\,dx = x \cdot (-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx = -x \cdot \cos x + sen\ x + C$

Una primitiva de la función f sería $-x \cdot \cos x + sen\ x$.

Ahora de la función g:

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

La hacemos por cambio de variable:

$$\begin{cases} t = \arctan x \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{cases}$$

Y sustituyendo:

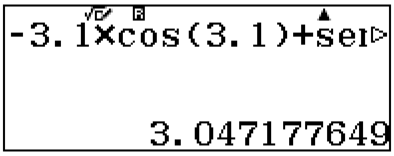
$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$$

Luego, una primitiva de la función g es: $\frac{(\arctan x)^2}{2}$

Ahora (no olvidemos activar el modo radián en nuestra calculadora):

$$\int_{0'66}^{3'1} f(x)\,dx = \int_{0'66}^{3'1} x \cdot sen\ x\,dx = [-x \cdot \cos x + sen\ x]_{0'66}^{3'1} =$$

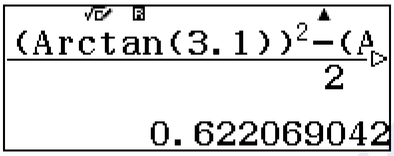
$$-3'1 \cdot \cos 3'1 + sen\ 3'1 + 0'66 \cdot \cos 0'66 - sen\ 0'66 \approx 3'047$$



Y

$$\int_{0'66}^{3'1} g(x)\,dx = \int_{0'66}^{3'1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_{0'66}^{3'1} =$$

$$\frac{(\arctan 3'1)^2}{2} - \frac{(\arctan 0'66)^2}{2} \approx 0'622$$



Y el área que nos piden será aprox. : $3'047 - 0'622 \approx$ **2´425 u^2 (unidades cuadradas)**