Solución al problema de “las bolas de acero”

Enunciado:

Cuatro bolas de acero tienen diámetros que son un número exacto de centímetros. Todas ellas son diferentes y sus diámetros son números consecutivos. Entre todas pesan lo mismo que una bola cuyo diámetro es el doble del diámetro de la más pequeña disminuido en un centímetro. Hallar los diámetros.

Solución:

Llamemos ***n, n + 1, n + 2 y n + 3*** a los diámetros respectivos de las cuatro bolas de acero (en cm).

La bola grande tiene de diámetro ***2*(n - 1) = 2n - 2***.

Suponiendo todas las bolas que están construidos con el mismo tipo de acero (misma densidad): ρ

Volumen bola grande: $V_g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2n-2}{2}\right)^3$

Volumen de las cuatro bolas (respectivamente):

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 \; ; \; V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^3 \; ; \; V_3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)^3 \; ; \; V_4 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n+3}{2}\right)^3$$

Al ser la masa igual al producto del volumen por su densidad y tener la misma densidad, ρ, todas las bolas:

$$V_g \cdot \rho = V_1 \cdot \rho + V_2 \cdot \rho + V_3 \cdot \rho + V_4 \cdot \rho \Rightarrow V_g = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

Por lo que:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2n-2}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{n+3}{2}\right)^3$$

Dividiendo dicha expresión entre $\frac{4}{3}\pi$:

$$\left(\frac{2n-2}{2}\right)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^3 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^3 + \left(\frac{n+2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n+3}{2}\right)^3$$

Y nos queda: $(2n-2)^3 = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ que, desarrollando:

$$8n^3 - 24n^2 + 24n - 8 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27$$

Por tanto, tenemos la ecuación: $4n^3 - 42n^2 - 18n - 44 = 0 \Leftrightarrow 2n^3 - 21n^2 - 9n - 22 = 0$

Cuya solución es n = 11.

Por tanto los diámetros respectivos son:

Solución: 11, 12, 13 y 14 cm (las cuatro bolas) y el de la bola grande 20 cm.