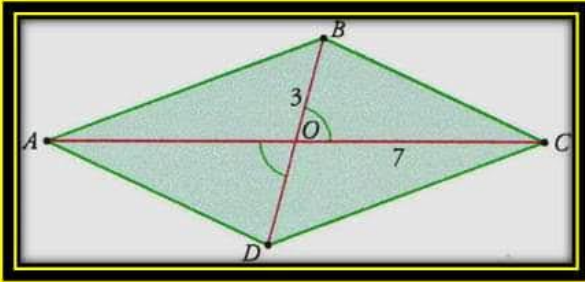


Solución al problema de “lados y ángulos de un paralelogramo”

Enunciado:



Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm, formando un ángulo de 75° . Hallar los lados y los ángulos del paralelogramo.

Solución:

Sabemos que las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio O y además:

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \text{ (siendo } \hat{O} = 75^\circ \text{)}$$

En el triángulo BOC tenemos (por el teorema del coseno): $BC^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos 75^\circ$

$$BC = \sqrt{58 - 42 \cdot \cos 75^\circ} \text{ cm (el lado AD mide lo mismo al tratarse de un paralelogramo).}$$

Por otra parte en el triángulo DOC (por el teorema del coseno): $DC^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos 105^\circ$

$$DC = \sqrt{58 - 42 \cdot \cos 105^\circ} \text{ cm (el lado AB mide lo mismo al tratarse de un paralelogramo).}$$

Ya tenemos los cuatro lados del paralelogramo:

$$AD = BC = \sqrt{58 - 42 \cdot \cos 75^\circ} = \sqrt{58 - 42 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{58 - \frac{21 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}} = \sqrt{\frac{116 - 21 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}} \text{ cm}$$

$$AB = DC = \sqrt{58 - 42 \cdot \cos 105^\circ} = \sqrt{58 - 42 \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \sqrt{58 - \frac{21 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}} = \sqrt{\frac{116 + 21 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}} \text{ cm}$$

Aproximadamente:

$$AD = BC = \sqrt{\frac{116 - 21(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}} = 6.865100153 \text{ cm} \text{ y } AB = DC = \sqrt{\frac{116 + 21(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}} = 8.298819187 \text{ cm.}$$

Ahora calculemos los ángulos.

En el triángulo ADC aplicamos el teorema del coseno:

$$14^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \hat{D} \Rightarrow \cos \hat{D} = \frac{196 - AD^2 - DC^2}{-2 \cdot AD \cdot DC}$$

Pero:

$$\begin{aligned} 196 - AD^2 - DC^2 &= 196 - \frac{116 - 21 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} - \frac{116 + 21 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} = \\ &= \frac{392 - 116 + 21 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 116 - 21 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} = 80 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} -2 \cdot AD \cdot DC &= -2 \cdot \sqrt{\frac{116 - 21 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}} \cdot \sqrt{\frac{116 + 21 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}} = \\ &= -2 \cdot \sqrt{\frac{116^2 - 21^2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4}} = -\sqrt{13456 - 441(6 - 4\sqrt{3} + 2)} = -\sqrt{9928 + 1764 \cdot \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos \hat{D} = \frac{196 - AD^2 - DC^2}{-2 \cdot AD \cdot DC} = \frac{80}{-\sqrt{9928 + 1764 \cdot \sqrt{3}}} = -\frac{80 \cdot \sqrt{9928 + 1764 \cdot \sqrt{3}}}{9928 + 1764 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\hat{D} = \arccos \left(-\frac{80 \cdot \sqrt{9928 + 1764 \cdot \sqrt{3}}}{9928 + 1764 \cdot \sqrt{3}} \right) \approx 134^\circ 35' 43.62'' \approx \hat{B}$$

Como la suma de los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° y los ángulos A y C ser iguales (por tener sus lados paralelos) se tiene:

$$\hat{A} = \frac{360^\circ - 2 \cdot \hat{D}}{2} = 180^\circ - \hat{D} \approx 180^\circ - 134^\circ 35' 43.62'' = 45^\circ 24' 16.38'' \approx \hat{C}$$