



- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
 - b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
 - d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$.)

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

- a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas. (1,25 puntos)
- b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. (1,25 puntos)



BLOQUE B

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. (0,5 puntos)
- Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. (2 puntos)

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ (1 punto)

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ (1,5 puntos)

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x + 1 = y - a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

- Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. (1,5 puntos)
- Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . (1 punto)

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

- Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . (0,75 puntos)
- Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . (1,75 puntos)

Ejercicio 1

$$\text{¿a?} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = \left[\frac{\infty}{+\infty} \right]^{\text{IND}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{3(\ln x)^2 + 2x} \stackrel{\text{L'H}}{=}$$

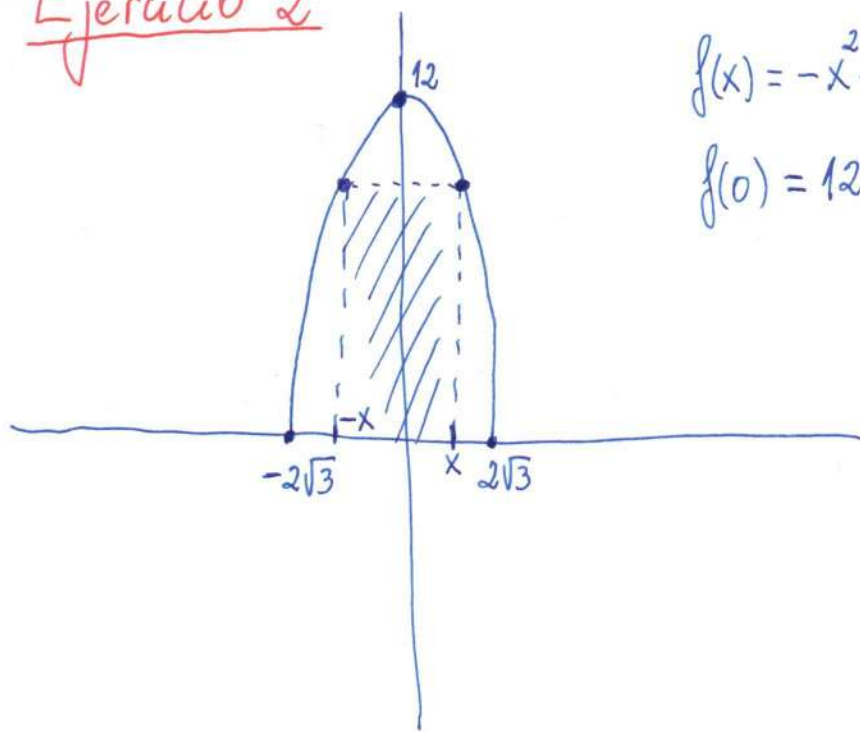
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{6 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{6 \cdot \ln x + 2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6}{x} + 2} =$$

$$= \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a=2}$$



José Antonio Cobalea

Ejercicio 2



$$f(x) = -x^2 + 12$$

$$f(0) = 12$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$A_{\text{rec}} = 2x \cdot (-x^2 + 12)$$

$$A_{\text{rec}} = -2x^3 + 24x$$

(ha de ser máxima)

$$A(x) = -2x^3 + 24x ; A'(x) = -6x^2 + 24 ; A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases}$$

$$A''(x) = -12x ; A''(-2) = 24 > 0 \text{ (mínimo)}$$

$$A''(2) = -24 < 0 \text{ (máxima)}$$

El área es máxima para x=2

Los vértices serían los puntos: $(-2, 8), (2, 8), (2, 0)$ y $(-2, 0)$

$$\text{Área de dicho rectángulo: } A(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = 32 \text{ u}^2$$

No puede
Ser pues
he conside-
rado "x"
como positivo

profe.mates.jac



Ejercicio 3

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1} dx = \int_3^8 \frac{1}{t} \cdot 2 \cdot (t+1) dt = 2 \cdot \int_3^8 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$t = \sqrt{1+x} - 1 \Rightarrow t+1 = \sqrt{1+x}$$

$$dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} dx \Rightarrow dx = 2 \cdot \sqrt{1+x} \cdot dt = 2 \cdot (t+1) \cdot dt$$

$$= \left[2 \cdot (t + \ln t) \right]_3^8 = \left[2 \cdot (\sqrt{1+x} - 1 + \ln(\sqrt{1+x} - 1)) \right]_3^8 =$$

$$= 2 \cdot (3 - 1 + \ln(3 - 1)) - 2 \cdot (2 - 1 + \overset{=0}{\ln(2 - 1)}) =$$
$$= 2 \cdot (2 + \ln 2) - 2 \cdot 1 = 2 + 2 \cdot \ln 2 = \boxed{2 + \ln 4}$$



José Antonio Cobalea

Ejercicio 4

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 2$$

a) $f(x) = g(x)$

$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$$

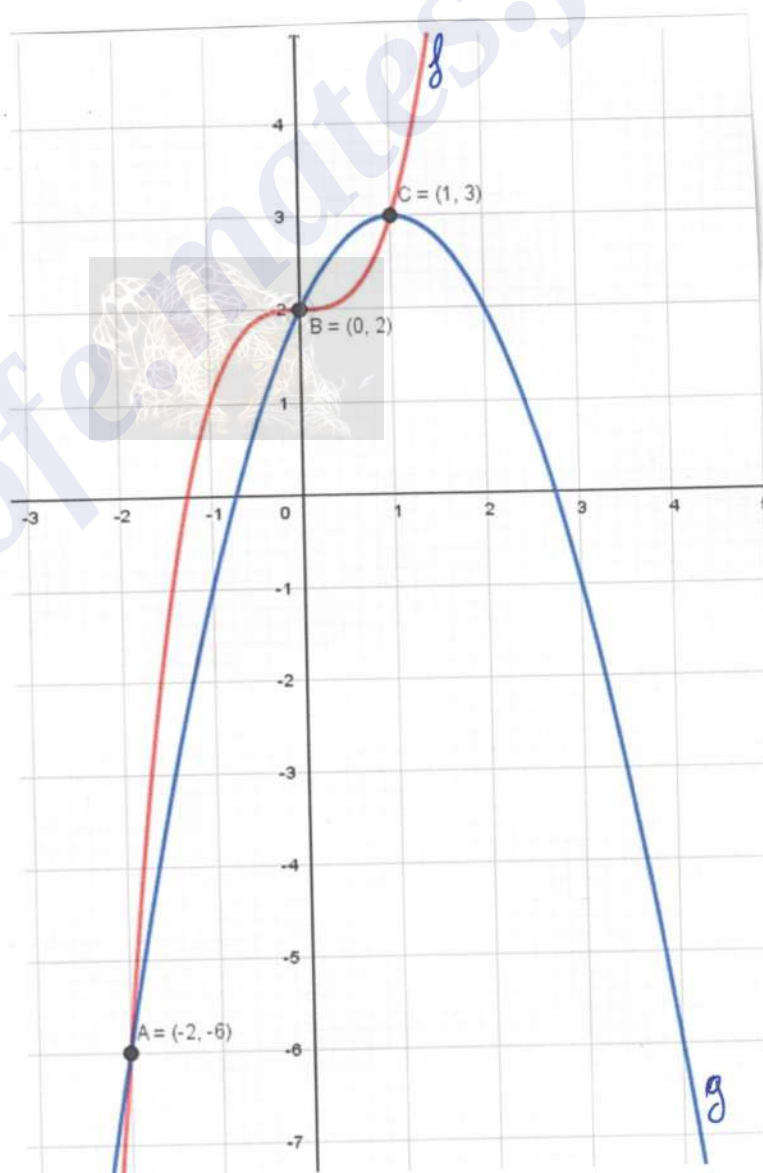
$$x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 6 \\ x = 1 \\ 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

Los puntos de corte de ambas son: $(0, 2), (1, 3)$ y $(-2, -6)$.

Las gráficas serían:

b) El área sería la región comprendida entre g y f en el intervalo $[0, 1]$. Es decir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g-f)(x) dx &= \\ &= \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12} u^2 \end{aligned}$$



profe.mates.jac



Ejercicio 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) B, al ser cuadrada, no tiene inversa sólo cuando $|B| = 0$.
($\det(B) = 0$)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = a \cdot (4 - 2a)$$

↑
desarrollo

$$|B| = 0 \Leftrightarrow a \cdot (4 - 2a) = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

b) $a = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot X \cdot B = C \quad \text{¿X?}$$

X, de existir, ha de ser de tamaño 2×3 .

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X \cdot B = A^{-1} \cdot C \Rightarrow \underline{\underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}}$$

La inversa de una matriz (si existe) es igual a la matriz adjunta de su traspuesta dividida por su determinante.

Calculemos $|A|$ y $|B|$ en primer lugar:



profe.mates.jac

Ejercicio 5 (cont.)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

↑
desarrollo

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{adjunta de la traspuesta de } A)$$

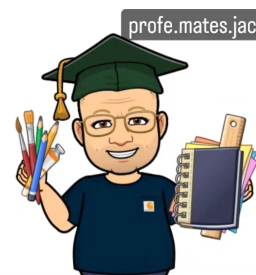
$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (B^T)^D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{adjunta de la traspuesta de } B)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^T)^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (B^T)^D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}} = X \quad (\text{matriz pedida})$$



Ejercicio 6

profe.mates.jac



José Antonio Cobalea

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$$

$$a) \begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot (-1) = 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (-6) \cdot (-2) = \boxed{12}$$

$$b) \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} \cdot (-1) = -6 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

↑
traspuestas (= det)

$$= -6 \cdot (-2) = \boxed{12}$$



José Antonio Cobalea

Ejercicio 7

$$r \equiv x+1=y-a=-z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-3 \\ z=2-\lambda \end{cases}$$

profe.mates.jac



a) ¿a? para que r y s se corten.

$$r \equiv \begin{cases} x=-1+\mu \\ y=a+\mu \\ z=-\mu \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-3 \\ z=2-\lambda \end{cases}$$
$$\begin{aligned} -1+\mu &= 5+2\lambda \\ -\mu &= 2-\lambda \\ \mu &= \lambda-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1+\lambda-2 &= 5+2\lambda \Rightarrow \lambda = -8 \\ \mu &= -10 \end{aligned}$$

$$-3 = a + \mu \Rightarrow a = -3 - \mu = -3 + 10 = 7$$

$$\boxed{a=7}$$

El punto de corte sería: $(5+2 \cdot (-8), -3, 2-(-8)) =$
 $(\lambda=-8) \rightarrow \boxed{(-11, -3, 10)}$

b) La recta s tiene como dirección el vector $(2, 0, -1)$.

La recta s pasa por el punto $(5, -3, 2)$.

Otro vector (perteneiente a la dirección del plano buscado) es el determinado por el punto anterior y P, es decir: $(3, -4, 0)$.

Ya tenemos los dos vectores directores del plano.

Ejercicio 7 (cont.)

El plano sería: $\begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$; es decir:

$$(x-8) \cdot (-4) - (y+7) \cdot 3 + (z-2) \cdot (-8) = 0$$

$$-4x + 32 - 3y - 21 - 8z + 16 = 0 \Leftrightarrow -4x - 3y - 8z + 27 = 0$$

$$4x + 3y + 8z - 27 = 0$$



José Antonio Cobalea

Ejercicio 8

$$\pi \equiv x + y - z = 2$$

$$r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$$

$$z - 1 = \frac{y}{3} \Rightarrow z = 1 + \frac{y}{3}$$

a)

$$\frac{y}{3} + y - \left(1 + \frac{y}{3}\right) = 2 \Leftrightarrow y - 1 = 2 \Leftrightarrow \underline{y = 3} \Rightarrow z = 1 + \frac{3}{3} = \underline{2}$$

$$x = \frac{y}{3} = \underline{\underline{1}}$$

$$\text{Pto intersección} = \boxed{(1, 3, 2)}$$

b)

$$Q(2, 6, 3)$$

$$\pi \equiv x + y - z = 2$$

Vector normal a $\pi = (1, 1, -1)$ (dirección de recta perpendicular a π).

Recta, que pasa por Q y tiene como dirección a $(1, 1, -1)$:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Halleamos $s \cap \pi$

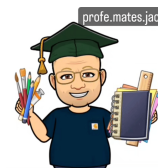
$$\begin{cases} s \equiv x - 2 = y - 6 = 3 - z \\ \pi \equiv x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 4 \\ z = 9 - y \end{cases}$$

$$y - 4 + y + y - 9 = 2 \Rightarrow \underline{y = 5}, \underline{x = 1}, \underline{z = 4}$$

$$\underline{\underline{P(1, 5, 4) \in \pi \cap s}}$$

$Q' = \text{pto simétrico}$

$$\overrightarrow{QQ'} = 2 \cdot \overrightarrow{QP} \Rightarrow (x - 2, y - 6, z - 3) = 2 \cdot (-1, -1, 1)$$

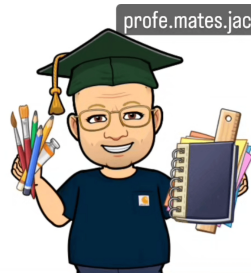


Ejercicio 8 (cont.)

Luego :

$$\begin{cases} x-2=-2 \Rightarrow x=0 \\ y-6=-2 \Rightarrow y=4 \\ z-3=2 \Rightarrow z=5 \end{cases}$$

El simétrico es el
punto $(0, 4, 5)$



José Antonio Cobalea