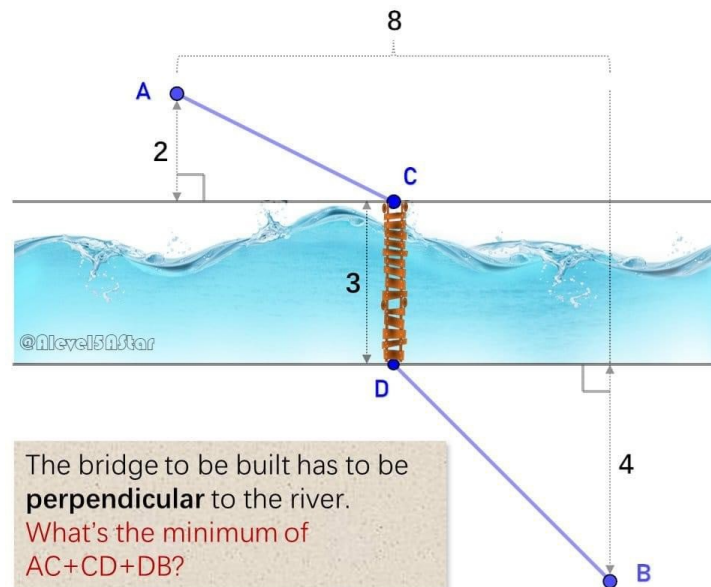


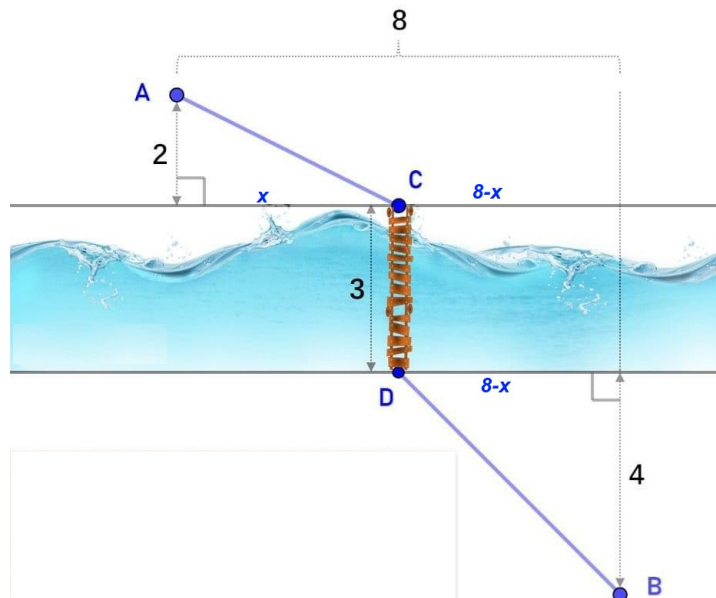
Solución al problema de "El puente (como problema de optimización)"

Enunciado:



Solución:

Consideremos el gráfico con estos valores:



$AC + CD + DB$ ha de ser mínima; o sea que $AC + DB + 3$ ha de ser mínima.

Pero: $AC^2 = 2^2 + x^2 = x^2 + 4$ y $DB^2 = 4^2 + (8-x)^2 = x^2 - 16x + 80$

Y, por tanto, la función que ha de ser mínima es:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-16x+80} + 3 \text{ ("x" ha de ser un número positivo y por tanto ha de ser tener un mínimo "x" positivo)}$$

Derivamos dicha función e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{(x-8) \cdot \sqrt{x^2+4} + x \cdot \sqrt{x^2-16x+80}}{\sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{x^2-16x+80}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ (ha de ser x positivo)}$$

$f'(x)$ es una función real continua que **sólo se anula en el valor positivo $x = 8/3$** . Veamos en un entorno de dicho punto el signo de la misma: $[2, 3]$.

$$f'(2) = \frac{-6 \cdot \sqrt{8} + 2 \cdot \sqrt{52}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{52}} \approx -0,125 < 0 \text{ y } f'(3) = \frac{-5 \cdot \sqrt{13} + 3 \cdot \sqrt{41}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}} \approx 0,051 > 0; \text{ lo que indica}$$

que la función f a la izquierda de $8/3$ es decreciente y a la derecha de $8/3$ es creciente. Eso significa que hay un mínimo relativo para f en el punto $8/3$. Así pues f presenta en $8/3$ un mínimo.

$$\text{Además: } f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{\frac{100}{9}} + \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{128}{3} + 80} + 3 = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} + 3 = 13 \text{ (longitud mínima pedida)}$$

P.D: se puede calcular la derivada segunda para comprobar que $f''\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{81}{500} > 0$; lo cual implica que hay un mínimo en dicho punto.

Solución: la longitud mínima $AC+CD+DB$ es 13