

Solución al problema de "Suma de las áreas de los infinitos círculos"

Enunciado:

Si el radio de un primer círculo es $\frac{1}{4}$, el del segundo es $\frac{1}{8}$, del tercero $\frac{1}{16}$, y así indefinidamente, calcula la suma de las áreas de los círculos.



Solución:



Calculemos la sucesión $\{a_n\}$ de las áreas de cada círculo.

$$a_1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}, a_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{64}, a_3 = \pi \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{\pi}{256}, \dots, a_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{\pi}{4^{n+1}}$$

La suma de esa sucesión infinita de áreas las podemos ver calculando antes las sumas parciales: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

con lo que nos quedaría la sucesión de sumas parciales S_n :

$$S_1 = \frac{\pi}{16}, S_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{64} = \frac{5\pi}{64}, S_3 = S_2 + a_3 = \frac{5\pi}{64} + \frac{\pi}{256} = \frac{21\pi}{256}, S_4 = S_3 + a_4 = \frac{21\pi}{256} + \frac{\pi}{1024} = \frac{85\pi}{1024},$$

$$S_5 = S_4 + a_5 = \frac{85\pi}{1024} + \frac{\pi}{4096} = \frac{341\pi}{4096}, S_6 = S_5 + a_6 = \frac{341\pi}{4096} + \frac{\pi}{16384} = \frac{1365\pi}{16384}, \dots \text{ y así}$$

sucesivamente.

Obtenemos una sucesión en la que los números que acompañan a π son los siguientes:

$$\frac{1}{16}, \frac{5}{64}, \frac{21}{256}, \frac{85}{1024}, \frac{341}{4096}, \frac{1365}{16384}, \frac{5461}{65536}, \frac{21845}{262144}, \frac{87381}{1048576}, \frac{349525}{4194304}, \dots$$

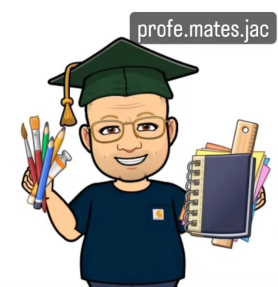
sucesión en la que el numerador de cada término a partir del segundo es cuatro veces el numerador anterior más uno y el denominador se corresponde con cuatro elevado a la suma de la posición que ocupa y uno.

Si obtenemos el desarrollo decimal de esa sucesión veremos que es una sucesión cuyo

límite es $0,08\bar{3} = \frac{1}{12}$.

Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{12}$.

Solución: $\pi/12$



José Antonio Cobalea