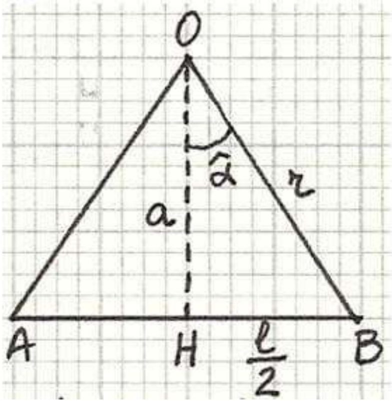
Solución al problema de "Área de un polígono regular de n lados"

Enunciado:

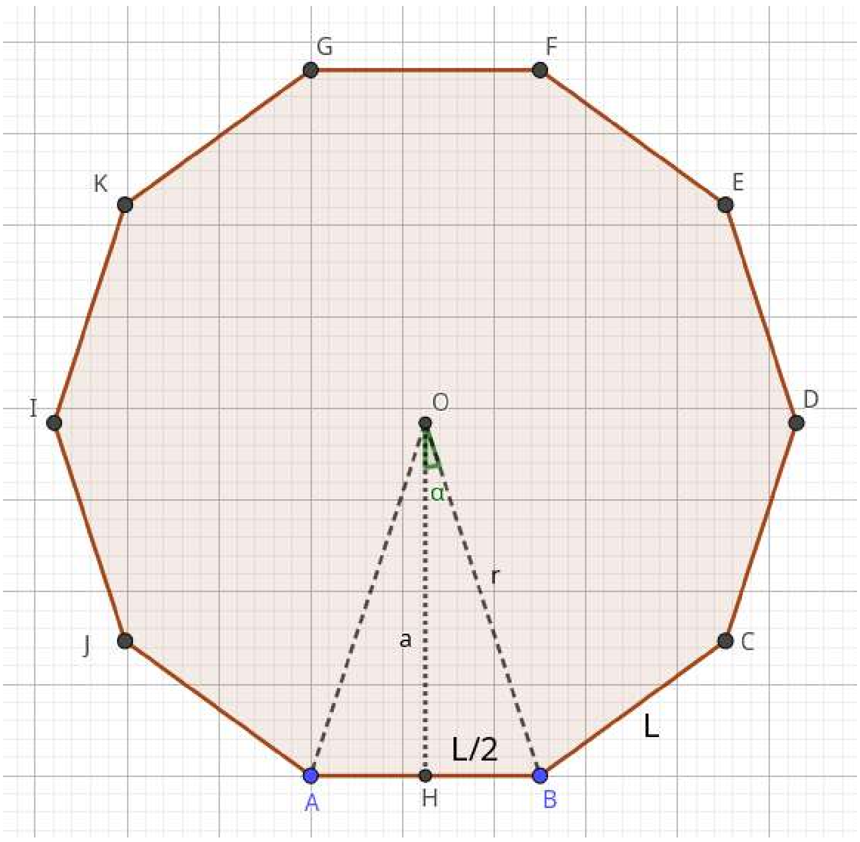
Obténgase al área de un polígono regular de n lados:

a. En función del lado.
b. En función de la apotema.
c. En función del radio.



Solución:

Consideremos la figura siguiente (polígono regular de 10 lados, por ejemplo)



En dicho polígono regular:

L es el lado, ***a*** es la apotema, ***r*** es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono y ***α*** es la mital del ángulo interior central de dicho polígono regular.

Sabemos que:

Área: $A_{polígono}=\frac{P\cdot a}{2}=\frac{n\cdot L\cdot a}{2}$, donde ***P*** es el perímetro del polígono.

$\alpha=\frac{360^o}{2n}$ y $\tan\alpha=\frac{L/2}{a}\Leftrightarrow a=\frac{L}{2\cdot\tan\alpha}\Leftrightarrow L=2\cdot\tan\alpha\cdot a$

a) En función del lado ***L***:

$$A_{polígono}=\frac{n\cdot L}{2}\cdot\frac{L}{2\cdot\tan\alpha}=\frac{n\cdot L^2}{4\cdot\tan\alpha}=\frac{n\cdot L^2}{4\cdot\tan\left(\frac{360^o}{2n}\right)}=\frac{n\cdot cotan\left(\frac{360^o}{2n}\right)}{4}\cdot L^2$$

b) En función de la apotema ***a***:

$$A_{polígono}=\frac{n\cdot L}{2}\cdot a=\frac{n\cdot 2\cdot\tan\alpha\cdot a}{2}\cdot a=n\cdot\tan\alpha\cdot a^2=n\cdot tan\left(\frac{360^o}{2n}\right)\cdot a^2$$

c) En función del radior ***r***:

En este caso tenemos: $sen\,\alpha=\frac{L}{2}\div r=\frac{L}{2r}\Leftrightarrow L=2\cdot sen\,\alpha\cdot r$ y $\cos\alpha=\frac{a}{r}\Leftrightarrow a=r\cdot\cos\alpha$

$$A_{polígono}=\frac{n\cdot L\cdot a}{2}=\frac{n\cdot 2r\cdot sen\,\alpha\cdot r\cdot\cos\alpha}{2}=\frac{n\cdot sen(2\alpha)\cdot r^2}{2}=\frac{n\cdot sen\left(\frac{360^o}{n}\right)}{2}\cdot r^2$$

Veamos ahora si coinciden estas fórmulas para los casos n=5 (pentágono regular) y n=8 (octógono regular), siendo 10 cm el lado del pentágono y 15 cm el lado del octógono (por ejemplo).

Ejemplo I (pentágono regular); n=5

L = 10 cm, $\alpha=\dfrac{360^o}{2\cdot 5}=36^o$, $a=\dfrac{L}{2\cdot\tan\alpha}=\dfrac{10}{2\cdot\tan 36^o}\approx 6{'}8819$ y

$$r=\frac{L}{2\cdot sen\,\alpha}=\frac{10}{2\cdot sen\,36^o}\approx 8{'}5065$$

$$A_{pentágono}=\frac{5\cdot 10\cdot 6{'}8819}{2}\approx 172{'}047\ cm^2$$

Con la fórmula del apartado *a)* :

$$A_{pentágono}\approx\frac{5\cdot cotan\,36^o}{4}\cdot 10^2\approx 172{'}047\ cm^2$$

Con la fórmula del apartado *b)* :

$$A_{pentágono}\approx 5\cdot\tan 36^o\cdot 6{'}8819^2\approx 172{'}047\ cm^2$$

Con la fórmula del apartado *c)* :

$$A_{pentágono}\approx\frac{5\cdot sen\,72^o}{2}\cdot 8{'}5065^2\approx 172{'}047\ cm^2$$

Coinciden todas ellas *c.p.v*

Ejemplo I (octógono regular); n=8

L = 15 cm, $\alpha=\dfrac{360^o}{2\cdot 8}=22{'}5^o$, $a=\dfrac{15}{2\cdot\tan(22{'}5^o)}\approx 18{'}1066$ y $r=\dfrac{15}{2\cdot sen(22{'}5^o)}\approx 19{'}5984$

$$A_{octógono}\approx\frac{8\cdot 15\cdot 18{'}1066}{2}\approx 1086{'}396\ cm^2$$

Con la fórmula del apartado *a)* :

$$A_{octógono} \approx \frac{8 \cdot cotan(22'5^o)}{4} \cdot 15^2 \approx 1086'396\ cm^2$$

Con la fórmula del apartado *b)* :

$$A_{octógono} \approx 8 \cdot \tan(22'5^o) \cdot 18'1066^2 \approx 1086'396\ cm^2$$

Con la fórmula del apartado *c)* :

$$A_{octógono} \approx \frac{8 \cdot sen\, 45^o}{2} \cdot 19'5984^2 \approx 1086'396\ cm^2$$

Coinciden todas ellas *c.p.v*

José Antonio Cobalea