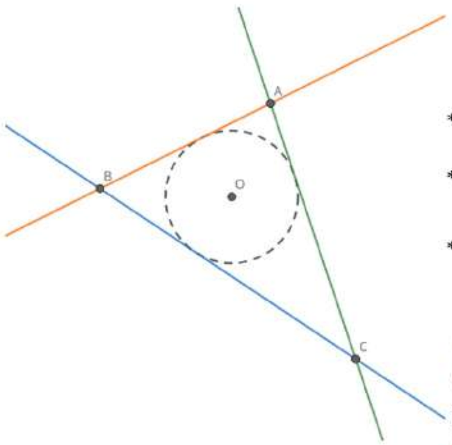
Solución al problema de "Circunferencia inscrita al triángulo"

Enunciado:



Los lados de un triángulo están determinados por las gráficas de ecuaciones:

* $r_1 \equiv 3x + y = 9$
* $r_2 \equiv x = -\dfrac{1+3y}{2}$
* $r_3 \equiv \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} = 1$

Calcula la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo y además el perímetro y el área de dicho triángulo.

Solución:

Vamos a determinar los vértices del triángulo primero. Para ello resolvemos los sistemas:

$$r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} ; \; r_1 \cap r_3 \equiv \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = -4 \end{cases} ; \; r_2 \cap r_3 \equiv \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Cuyas soluciones respectivas son: ***C(4, -3)***, ***A(2, 3)*** y ***B(-2, 1)***.

Para hallar el centro O de la circunferencia inscrita debemos calcular la intersección de al menos dos de las bisectrices de dicho triángulo (por ejemplo la bisectriz que parte de A y la que parte de B).

* ***Bisectriz que parte de A***:

$\dfrac{|3x + y - 9|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|x - 2y + 4|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |3x + y - 9| = \sqrt{2} \cdot |x - 2y + 4|$; de aquí salen dos bisectrices:

$b_{A1} \equiv (3 - \sqrt{2})x + (1 + 2\sqrt{2})y - 9 - 4\sqrt{2} = 0$ y $b_{A2} \equiv (3 + \sqrt{2})x + (1 - 2\sqrt{2})y - 9 + 4\sqrt{2} = 0$

La bisectriz interior al triángulo se corresponde con:

$$b_A \equiv (3+\sqrt{2})x+(1-2\sqrt{2})y-9+4\sqrt{2}=0$$

* ***Bisectriz que parte de B***:

$\dfrac{|2x+3y+1|}{\sqrt{13}}=\dfrac{|x-2y+4|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2x+3y+1|=\sqrt{\dfrac{13}{5}}\cdot|x-2y+4|$; de aquí salen dos bisectrices:

$b_{B1} \equiv \left(2-\sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)x+\left(3+2\sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)y+1-4\sqrt{\dfrac{13}{5}}=0$ y

$b_{B2} \equiv \left(2+\sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)x+\left(3-2\sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)y+1+4\sqrt{\dfrac{13}{5}}=0$

La bisectriz interior al triángulo se corresponde con:

$$b_B \equiv \left(2-\sqrt{\frac{13}{5}}\right)x+\left(3+2\sqrt{\frac{13}{5}}\right)y+1-4\sqrt{\frac{13}{5}}=0$$

El punto de la circunferencia O será la intersección de ambas bisectrices:

$\begin{cases} (3+\sqrt{2})x+(1-2\sqrt{2})y-9+4\sqrt{2}=0 \\ \left(2-\sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)x+\left(3+2\sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)y+1-4\sqrt{\dfrac{13}{5}}=0 \end{cases}$; cuya solución aproximada es:

$x \approx 1'09184 \ ; \ y \approx 0'80751$

Y el centro de la circunferencia es aproximadamente $O(1'09184 , 0'80751)$

El radio de la misma será la distancia desde el punto O a cualquier lado del triángulo:

por ejemplo d(O, r_1).

$r=d(O,r_1) \approx \dfrac{|3\cdot 1'09184+0'80751-9|}{\sqrt{10}} \approx 1'55488$ (radio de la circunferencia)

La ecuación pedida de la circunferencia sería:

$$(x-1'09184)^2+(y-0'80751)^2=1'55488^2$$

Ahora vamos a calcular el perímetro:

$$P=d(A,B)+d(B,C)+d(A,C)=\sqrt{4^2+2^2}+\sqrt{6^2+4^2}+\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{20}+\sqrt{52}+\sqrt{40}$$

$\boldsymbol{P\approx 18\acute{}\,00779\ u}$ *(perímetro pedido)*

Finalmente calculamos el área que nos piden (usando la fórmula de Herón):

Semiperímetro: $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{\sqrt{52}+\sqrt{40}+\sqrt{20}}{2}\approx 9\acute{}\,003896$

$$A=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{52}+\sqrt{40}+\sqrt{20}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{52}+\sqrt{40}+\sqrt{20}}{2}-\sqrt{52}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{52}+\sqrt{40}+\sqrt{20}}{2}-\sqrt{40}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{52}+\sqrt{40}+\sqrt{20}}{2}-\sqrt{20}\right)}$$

Con lo que el aŕea es: $\boldsymbol{A=14\ u^2}$ *(área pedida)*

José Antonio Cobalea