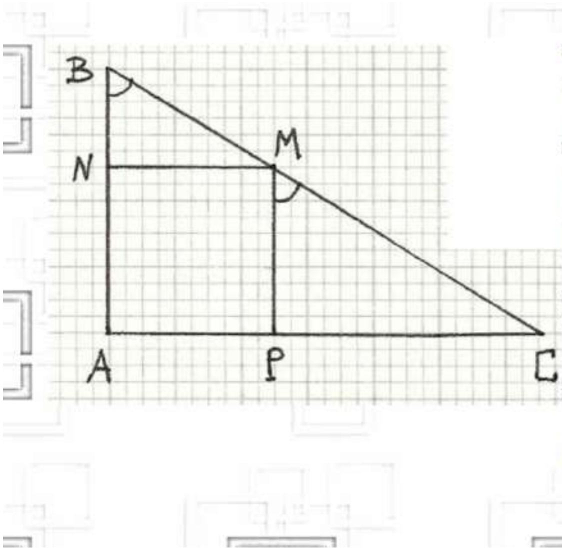
Solución al problema de "Cuadrado inscrito en triángulo rectángulo"

Enunciado:



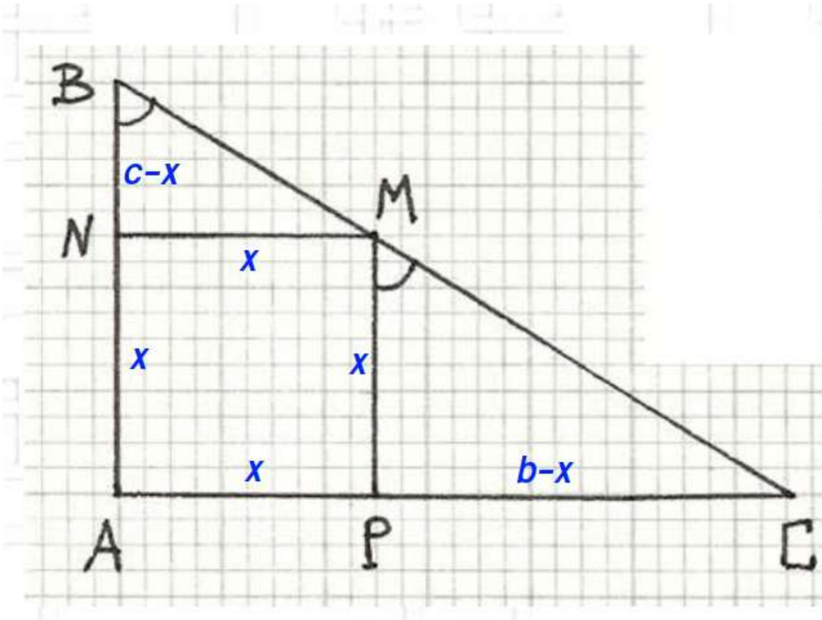
Se tiene un triángulo rectángulo *ABC* de catetos *b* y *c*. Un cuadrado está inscrito en dicho triángulo de forma que dos de sus lados descansan en dichos catetos y un vértice está en la hipotenusa.

a) *Calcula perímetro y el área de dicho cuadrado en función de los catetos b y c.*

b) *Si b=9 y c=12, calcula la diagonal del cuadrado así construido.*

Solución:

Consideremos nuestra figura del siguiente modo:



donde: c=AB, x=MN=MP=AP=AN, c-x=BN, b=AC y b-x=CP.

El área del cuadrado es $\boldsymbol{x^2}$ que coincide con: $x^2 = A_{APMN} = A_{ABC} - A_{BMN} - A_{CMP}$

Pero:

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c,\ A_{BMN}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(c-x) \text{ y } A_{CMP}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(b-x)$$

Con lo que:

$$A_{BMN}+A_{CMP}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(c-x)+\frac{1}{2}\cdot x\cdot(b-x)=\frac{1}{2}cx-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}bx-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x(b+c)-x^2$$

Y el área del cuadrado será:

$$x^2=A_{APMN}=\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}x(b+c)+x^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}x(b+c)\Leftrightarrow x=\frac{bc}{b+c}$$ (*lado del cuadrado inscrito*)

a)

Luego el perímetro del cuadrado es: $P=\frac{4bc}{b+c}$

Y el área del cuadrado será de: $A=\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2$

b)

Si b=9 y c=12 el lado del cuadrado será de: $x=\frac{9\cdot 12}{21}=\frac{108}{21}=\frac{36}{7}$ y la diagonal pedida será:

$$d=\sqrt{2\cdot\left(\frac{36}{7}\right)^2}=\frac{36}{7}\cdot\sqrt{2}=\frac{36\cdot\sqrt{2}}{7}\approx 7{'}273\ (\textit{unidades})$$