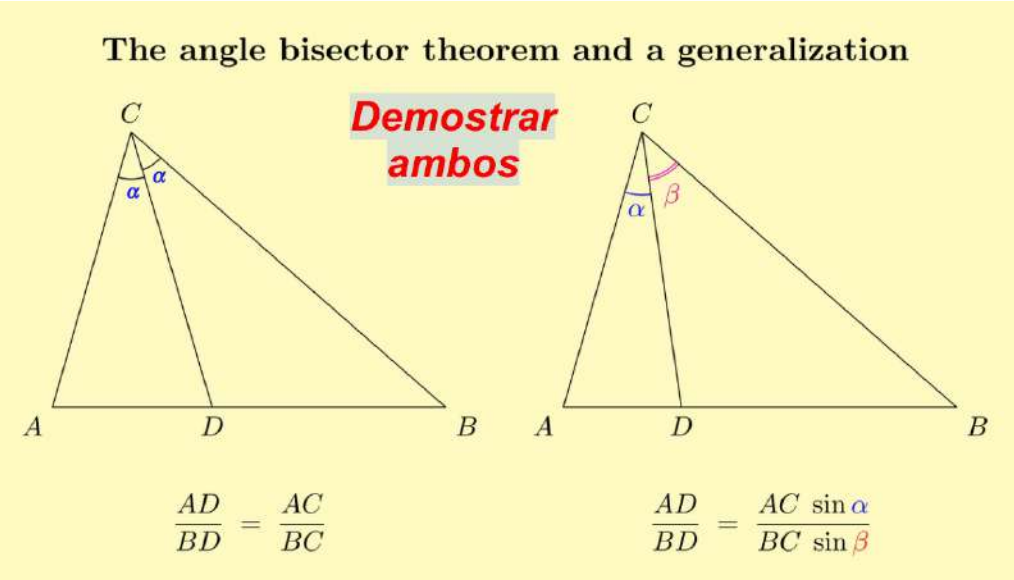
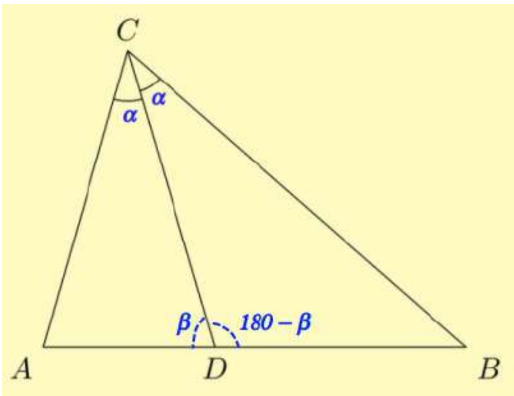
Solución al problema de "The angle bisector theorem and a generalization"

Enunciado:



Solución:

Veamos primero *"the angle bisector theorem"*:



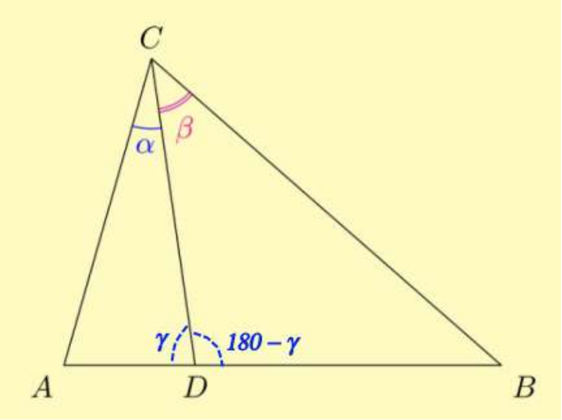
Por el teorema de los senos en el triángulo ΔACD: $\frac{AC}{sen\,\beta} = \frac{AD}{sen\,\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}$

Por el teorema de los senos en el triángulo ΔBCD: $\frac{BC}{sen\,180^o - \beta} = \frac{BD}{sen\,\alpha} \Leftrightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}$ (*al tener un ángulo y su suplementario el mismo valor del seno*).

Igualando se obtiene: $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD} \Leftrightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$ *c.p.d*

Con lo que queda demostrado el teorema del ángulo bisector.

Ahora demostraremos *"a generalization of the angle bisector theorem"*:



Por el teorema de los senos en el triángulo ΔACD: $\frac{AC}{sen\,\gamma}=\frac{AD}{sen\,\alpha} \Leftrightarrow AD=\frac{AC\cdot sen\,\alpha}{sen\,\gamma}$

Por el teorema de los senos en el triángulo ΔBCD: $\frac{BD}{sen\,\beta}=\frac{BC}{sen(180^o-\gamma)}=\frac{BC}{sen\,\gamma}$; por lo que: $BD=\frac{BC\cdot sen\,\beta}{sen\,\gamma}$.

Por tanto: $\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot sen\,\alpha}{sen\,\gamma}\div\frac{BC\cdot sen\,\beta}{sen\,\gamma}=\frac{AC\cdot sen\,\alpha}{BC\cdot sen\,\beta}$

Hemos obtenido que $\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot sen\,\alpha}{BC\cdot sen\,\beta}$ *c.p.d*

Con lo que queda demostrada la generalización del teorema bisector de un ángulo.