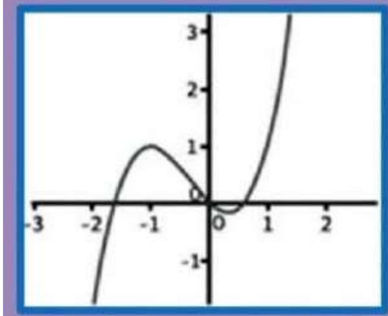
Solución al problema de "Función polinómica de grado 3"

Enunciado:



Determinar una función polinómica de grado 3 sabiendo que alcanza un máximo en $x_0 = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1, 1)$ y que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x_0 = 0$.

Solución:

Llamemos a la función solicitada: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Al pasar la gráfica por el punto ***(1, 1)*** se tiene: $1=f(1)=a+b+c+d$

Al ser derivable (por ser polinómica) y tener un máximo en el punto de abcisa 1 se tiene: $0=f\,'(1)$; pero $f\,'(x)=3ax^2+2bx+c$, luego: $0=3a+2b+c$.

El punto ***(0, d)*** es un punto de la gráfica y la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa 0 es: $r\equiv y-y_0=f\,'(x_0)\cdot(x-x_0)\equiv y-d=f\,'(0)\cdot(x-0)$

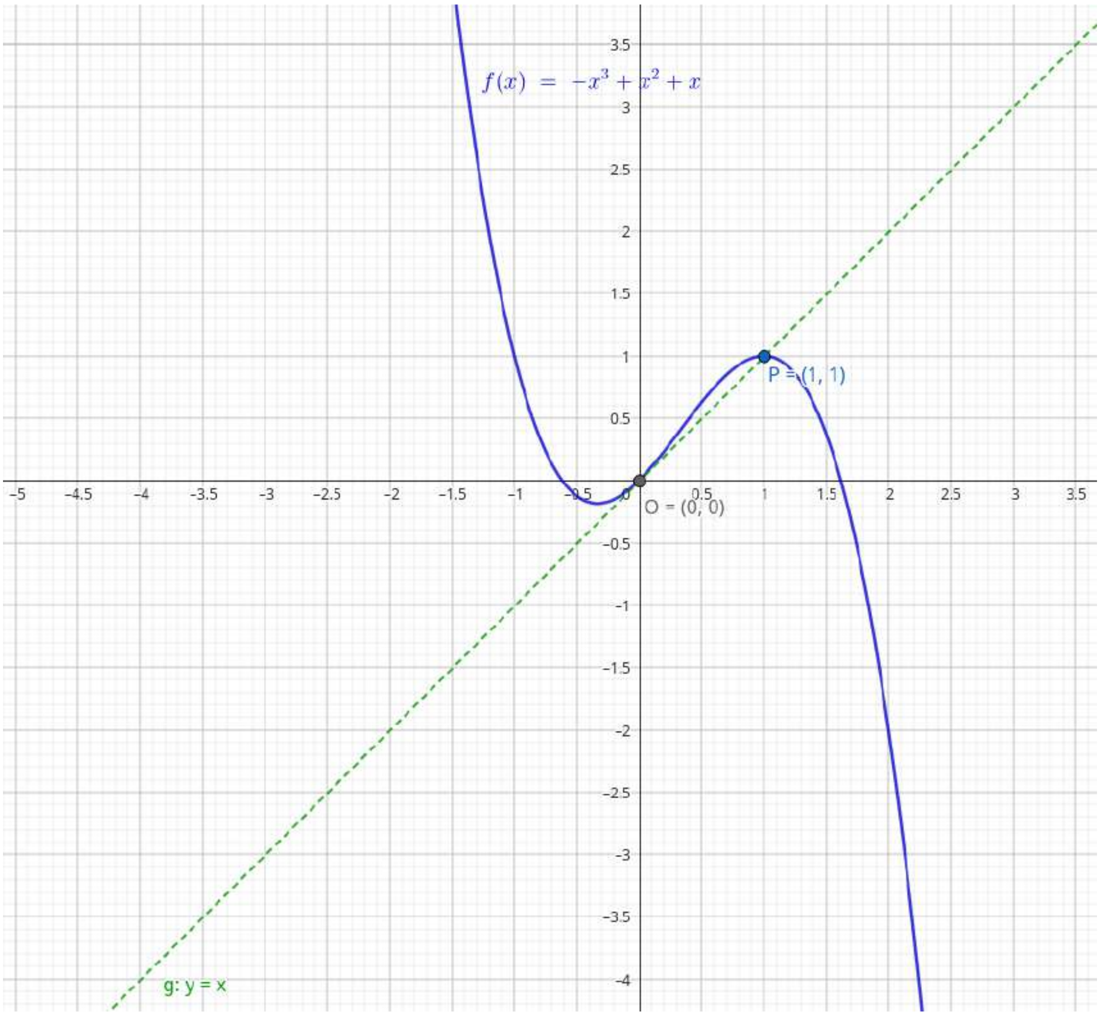
$$r\equiv y-d=cx\equiv y=cx+d$$

Según se nos indica $r\equiv y=x$, luego $c=1\ \ y\ \ d=0$.

Con lo que nos queda el sistema: $\begin{cases} a+b+1=1 \\ 3a+2b+1=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+2b=-1 \end{cases}$ cuyas soluciones son $a=-1\ \ y\ \ b=1$

Solución: $f(x)=-x^3+x^2+x$

Veamos la gráfica con [Geogebra]:



José Antonio Cobalea