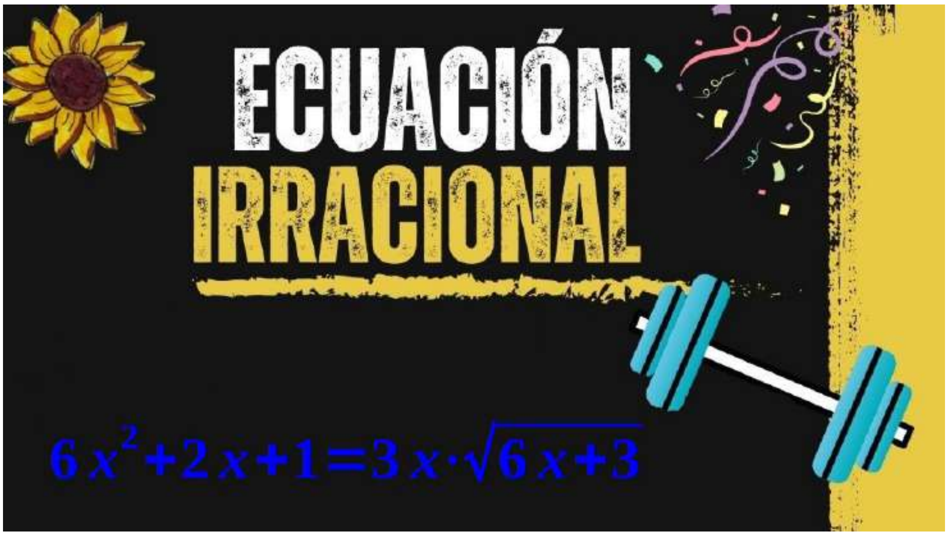
Solución al problema de "Resuelve esta otra ecuación irracional"

Enunciado:



Solución:

Llamemos $z=\sqrt{6x+3}$ *(cambio de variable)*. Claramente $z\geq 0$. Entonces:

$z^2=6x+3 \Leftrightarrow x=\dfrac{z^2-3}{6}$ y por tanto nos queda la ecuación en la forma:

$$6\left(\frac{z^2-3}{6}\right)^2+\frac{z^2-3}{3}+1=\frac{z^2-3}{2}\cdot z \Leftrightarrow \frac{(z^2-3)^2}{6}+\frac{(z^2-3)\cdot(2-3z)}{6}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^2-3)^2+(z^2-3)\cdot(2-3z)+6=0 \Leftrightarrow z^4-6z^2+9+2z^2-3z^3-6+9z+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4-3z^3-4z^2+9z+9=0$$

Si factorizamos el polinomio $z^4-3z^3-4z^2+9z+9$ obtenemos que:

$z^4-3z^3-4z^2+9z+9=(z-3)\cdot(z+1)\cdot\left(z+\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\cdot\left(z-\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)$, cuyas raíces son:

$$z_1=3\ ,\ z_2=-1\ ,\ z_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\ ,\ z_4=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

De las cuales (recuerda que $z\geq 0$), son soluciones z_1 y z_4 , por lo que:

I) Si $z=3$, $\sqrt{6x+3}=3 \Leftrightarrow 6x+3=9 \Leftrightarrow x=1$

II) Si $z=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\sqrt{6x+3}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow 4\cdot(6x+3)=\left(1+\sqrt{13}\right)^2\Rightarrow \boldsymbol{x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}}$

Al tratarse de una ecuación irracional comprobamos ambas:

I) Si $x=1$, $¿6\cdot 1^2+2\cdot 1+1=3\cdot 1\cdot\sqrt{6\cdot 1+3}\ ?\Leftrightarrow 9=3\cdot\sqrt{9}=3\cdot 3$; sí, $\boldsymbol{x=1}$ es solución.

II) Si $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$, $¿\ 6\cdot\left(\frac{1+\sqrt{13}}{12}\right)^2+2\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{12}+1=3\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{12}\cdot\sqrt{6\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{12}+3}\ ?$

Pero:

$6\cdot\left(\frac{1+\sqrt{13}}{12}\right)^2=\frac{7+\sqrt{13}}{12}$, con lo que el primer miembro queda:

$\frac{7+\sqrt{13}}{12}+\frac{2+2\sqrt{13}}{12}+\frac{12}{12}=\frac{21+3\sqrt{13}}{12}$

Y el segundo miembro sería: $\frac{3+3\sqrt{13}}{12}\cdot\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}=\sqrt{\frac{1116+252\sqrt{13}}{288}}=\sqrt{\frac{31+7\sqrt{13}}{8}}$

que es igual al primero: $\frac{21+3\sqrt{13}}{12}=\sqrt{\frac{31+7\sqrt{13}}{8}}$, por lo que $\boldsymbol{x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}}$ también es solución.

$$\frac{21+3\sqrt{13}}{12}-\sqrt{\frac{31+7\sqrt{13}}{8}}\quad = \quad 0$$