

Solución al problema de "The value of..."

Enunciado:

Let α and β be the roots of $x^2 - 6x - 2 = 0$, with $\alpha > \beta$.

If $a_n = \alpha^n - \beta^n$ for $n \geq 1$, then the value of $\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9}$ is ?

Solución:

Como α y β son soluciones de $x^2 - 6x - 2 = 0$ se tiene que:

$\alpha^2 - 6\alpha - 2 = 0$ y $\beta^2 - 6\beta - 2 = 0$, con lo que:

$$\alpha^n - 6\alpha^{n-1} - 2\alpha^{n-2} = \alpha^{n-2} \cdot (\alpha^2 - 6\alpha - 2) = 0 \text{ y } \beta^n - 6\beta^{n-1} - 2\beta^{n-2} = \beta^{n-2} \cdot (\beta^2 - 6\beta - 2) = 0$$

Luego, restando término a término ambas expresiones:

$$\begin{aligned} \alpha^n - 6\alpha^{n-1} - 2\alpha^{n-2} &= 0 \\ \beta^n - 6\beta^{n-1} - 2\beta^{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Obtenemos: } \alpha^n - \beta^n - 6(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - 2(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) = a_n - 6a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$

$$\text{O sea que: } a_{10} - 6a_9 - 2a_8 = 0 \Leftrightarrow a_{10} - 2a_8 = 6a_9$$

$$\text{Y por tanto: } \frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9} = \frac{6a_9}{2a_9} = 3$$

Solución: 3

