Solución al problema de "Uno con el número áureo"

Enunciado:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(golden ratio)}$$

PROVE THAT $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\phi^{2n} - \frac{1}{\phi^{2n}} + \phi^{2n+1} + \frac{1}{\phi^{2n+1}} = \phi^{2n+2} - \frac{1}{\phi^{2n+2}}$.

Solución:

Recordemos un par de propiedades del número áureo ϕ : $\phi^2=\phi+1$ y $\frac{1}{\phi}=\phi-1$

Tenemos que:

$$\phi^{2n}-\frac{1}{\phi^{2n}}+\phi^{2n+1}+\frac{1}{\phi^{2n+1}}=\phi^{2n+1}+\phi^{2n}-\frac{1}{\phi^{2n}}+\frac{1}{\phi^{2n+1}}=\phi^{2n}\cdot(\phi+1)-\frac{1}{\phi^{2n+1}}\cdot(\phi-1)=$$

$$=\phi^{2n}\cdot\phi^2-\frac{1}{\phi^{2n+1}}\cdot\frac{1}{\phi}=\phi^{2n+2}-\frac{1}{\phi^{2n+2}} \quad c.q.d$$