Solución al problema de "Valor máximo de la expresión A"

Enunciado:

$$|x-2| \le 1$$

$$A = \left|x^3 - 2x^2 - 5x + 10\right|$$

$$A_{max} = ?$$

Solución:

Como $|x-2| \le 1$, esto quiere decir que $1 \le x \le 3$; por tanto el dominio de la función $A(x) = \left|x^3 - 2x^2 - 5x + 10\right|$ es precisamente $D = \{x \in \Re\, ; 1 \le x \le 3\}$.

Consideremos la función $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$ y estudiemos su signo en el intervalo ***D***.

Se trata de una función continua en dicho intervalo; además $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \;\; o \;\; x = \sqrt{5}$ en el intervalo mencionado. Se tiene que: $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = (x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot (x - 2)$.

Por tanto:

En (1, 2): g(x)>0

En (2, $\sqrt{5}$): g(x)<0

En ($\sqrt{5}$, 3): g(x)>0

Ahora veamos la función $A(x) = \left|x^3 - 2x^2 - 5x + 10\right| = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5x + 10 & si \;\; 1 \le x < 2 \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 10 & si \;\; 2 \le x \le \sqrt{5} \\ x^3 - 2x^2 - 5x + 10 & si \;\; \sqrt{5} < x \le 3 \end{cases}$

Es una función continua; veamos su derivabilidad:

Los únicos puntos donde puede no ser derivable son en el 2 y/o en el $\sqrt{5}$. En el resto es derivable (esto lo vemos para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento).

$\boldsymbol{A'(2^-)=3\cdot 2^2-4\cdot 2-5=-1}$ y $\boldsymbol{A'(2^+)=-3\cdot 2^2+4\cdot 2+5=1}$; ***A*** no es derivable en 2.

$\boldsymbol{A'(\sqrt{5}^-)=-3\cdot(\sqrt{5})^2+4\cdot\sqrt{5}+5=-10+4\cdot\sqrt{5}}$ y $\boldsymbol{A'(\sqrt{5}^+)=3\cdot(\sqrt{5})^2-4\cdot\sqrt{5}-5=10-4\cdot\sqrt{5}}$; ***A*** tampoco es derivable en $\sqrt{5}$.

La función derivada de A sería:

$$\boldsymbol{A'(x)=\begin{cases} 3x^2-4x-5 & si\ 1\leq x<2 \\ -3x^2+4x+5 & si\ 2<x<\sqrt{5} \\ 3x^2-4x-5 & si\ \sqrt{5}<x\leq 3 \end{cases}}$$

Dicha derivada se anula en el punto $\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{19}}{3}\approx 2'11963}$ del intervalo (1, 3).

En (1, 2), A´(x)<0. A(x) es estrictamente decreciente.

En (2, $\frac{2+\sqrt{19}}{3}$), A´(x)>0. A(x) es estrictamente creciente.

En ($\frac{2+\sqrt{19}}{3}$, $\sqrt{5}$), A´(x)<0. A(x) es estrictamente decreciente.

En ($\sqrt{5}$, 3), A´(x)>0. A(x) es estrictamente creciente.

En [1, 2]: A(x) toma los valores entre A(2)=0 y A(1)=4.

En (2, $\frac{2+\sqrt{19}}{3}$): A(x) toma los valores entre A(2)=0 y A($\frac{2+\sqrt{19}}{3}$)$\sim$0´06067.

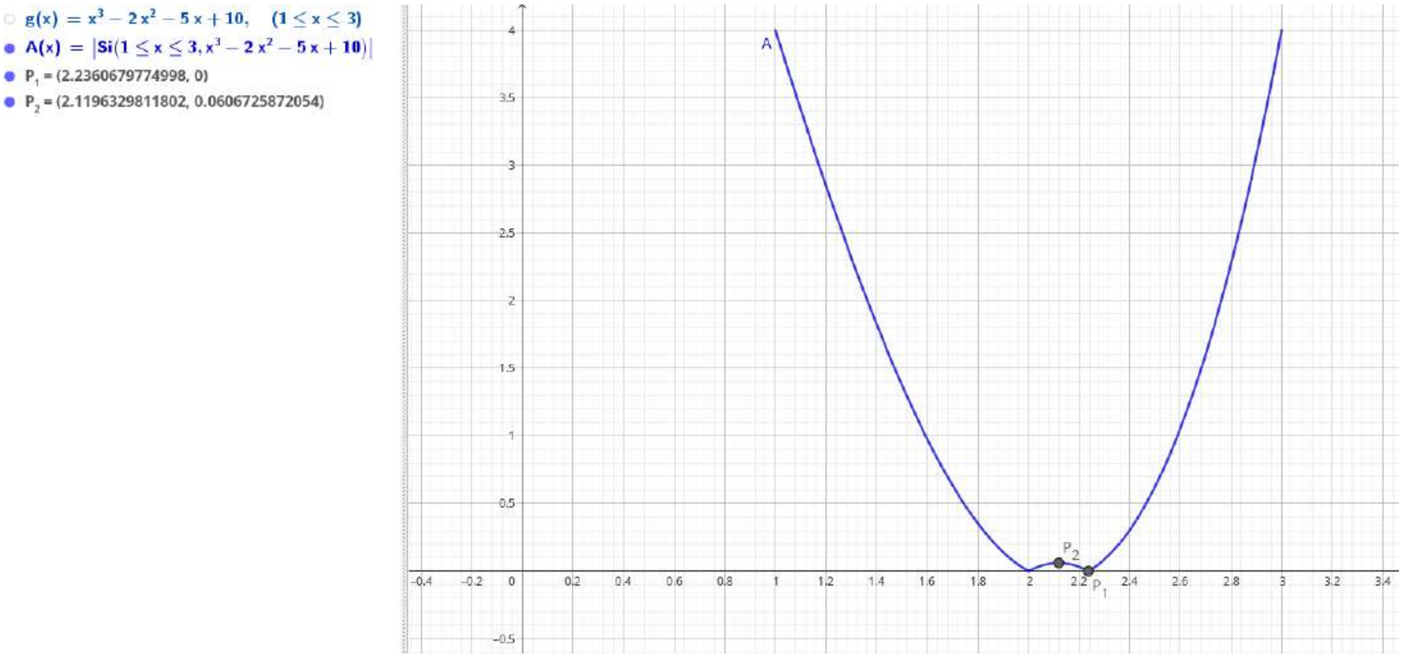
En ($\frac{2+\sqrt{19}}{3}$, $\sqrt{5}$): A(x) toma los valores entre A($\sqrt{5}$)=0 y A($\frac{2+\sqrt{19}}{3}$)$\sim$0´06067.

En ($\sqrt{5}$, 3): A(x) toma los valores entre A($\sqrt{5}$)=0 y A(3)=4.

Así pues el valor máximo que toma A es el 4. $\boldsymbol{A_{max}=4}$

Solución: **4**

Véase la gráfica con Geogebra:


$g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10, \quad (1 \le x \le 3)$
$A(x) = |Si(1 \le x \le 3, x^3 - 2x^2 - 5x + 10)|$
$P_1 = (2.2360679774998, 0)$
$P_2 = (2.1196329811802, 0.0606725872054)$
A
P_2
P_1


profe.mates.jac