Solución al problema de "Calcula la suma de todas las cifras del entero N"

Enunciado:

Consideremos el entero

$$N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{99\ldots99}_{321\text{ cifras}}$$

Calcula la suma de todas las cifras de N.

Solución:

Dicho entero ***N*** se puede poner en la forma:

$$N=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+(10^5-1)+\ldots+(10^{321}-1)$$

O sea: $N=10+10^2+10^3+10^4+10^5+\ldots+10^{321}-321$

Veamos cuánto da la suma: $S_{321}=10+10^2+10^3+10^4+10^5+\ldots+10^{321}$, siendo $S_n=10+10^2+10^3+\ldots+10^n\ ; n\in N\ (n\le 321)$

Para n=1, $S_1=10$ (un uno seguido de un 0)

Para n=2, $S_2=10+10^2=110$ (dos unos seguido de un 0)

Para n=3, $S_3=10+10^2+10^3=1110$ (tres unos seguido de un 0)

Para n=4, $S_4=10+10^2+10^3+10^4=11110$ (cuatro unos seguido de un 0)

Siguiendo con este proceso parece que S_n tiene n unos seguido de un 0.

Supongamos que es cierto para n-1: ¿será cierto para n? (principio de inducción mátemática)

Suponemos que S_{n-1} tiene n-1 unos seguido de un 0 (número de n cifras)

Entonces $S_n=S_{n-1}+10^n$ tiene n unos seguido de un 0 (número de n+1 cifras; pues 10^n es un uno seguido de n ceros).

Así pues queda demostrado (que S_n tiene n unos seguido de un 0).

Y por tanto S_{321} tiene 321 unos seguido de un 0.

O sea:

$\boldsymbol{S_{321}=111...10\ ;}(321\,unos)$ y $\boldsymbol{N=S_{321}-321=111...1110}\ (321\,unos)\boldsymbol{-321=111...10789}\ (318\,unos)$

Así pues ***N*** consta de 318 unos seguidos de las cifras 0, 7, 8 y 9.

Luego la suma de todas sus cifras es: $\boldsymbol{318\cdot 1+0+7+8+9=342}$

Solución: ***342***

José Antonio Cobalea

https://profematesjac.wordpress.com/