

Solución al problema de "El mínimo coste"

Enunciado:

Una furgoneta que transporta *Functions machines* va de *Mathemcity* a *Polintown*, que distan **300 km**, a una velocidad constante de x km/h. El precio del carburante es de **0.6 €/litro** y el consumo de la furgoneta es de:

$$\left(10 + \frac{x^2}{120}\right) \text{ litros/hora.}$$

Por otra parte, el conductor *John Driver* cobra **8 €/hora**. Hállese la velocidad para la cual el viaje entre estas dos pintorescas localidades resulta lo más económico posible, justificando con la derivada segunda. ¿Cuál es el mínimo coste?



Solución:

El tiempo en horas que tarda en llegar la furgoneta es de $\frac{300}{x}$.

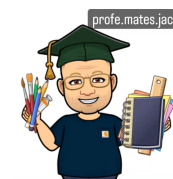
Durante ese tiempo la furgoneta consume (litros): $\left(10 + \frac{x^2}{120}\right) \cdot \frac{300}{x}$

El coste de esos litros consumidos es de: $\left(10 + \frac{x^2}{120}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 0.6$ euros.

Por otra parte, el conductor John cobra: $8 \cdot \frac{300}{x} = \frac{2400}{x}$ euros.

Así pues el coste total será de: $C(x) = \left(10 + \frac{x^2}{120}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 0.6 + \frac{2400}{x} = \left(10 + \frac{x^2}{120}\right) \cdot \frac{180}{x} + \frac{2400}{x}$

O sea de: $C(x) = \frac{1800}{x} + \frac{3x}{2} + \frac{2400}{x} = \frac{4200}{x} + \frac{3x}{2} = \frac{3x^2 + 8400}{2x}$ euros (función coste que hemos de minimizar).



$C'(x) = \frac{3x^2 - 8400}{2x^2}$; $C'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 8400 \Leftrightarrow x^2 = 2800 \Rightarrow x = \sqrt{2800} = 20 \cdot \sqrt{7}$ (pues x ha de ser positivo).

Calculemos la derivada segunda:

$C''(x) = \frac{8400}{x^3}$; $C''(20 \cdot \sqrt{7}) = \frac{8400}{(20 \cdot \sqrt{7})^3} \approx 0.05669 > 0$ Hay un coste mínimo para:

$$x = 20 \cdot \sqrt{7} \approx 52.915 \text{ km/h.}$$

Dicho coste mínimo será de:

$$C(20 \cdot \sqrt{7}) = \frac{3 \cdot (20 \cdot \sqrt{7})^2 + 8400}{2 \cdot 20 \cdot \sqrt{7}} = 60 \cdot \sqrt{7} \approx 158.75 \text{ euros.}$$



José Antonio Cobalea