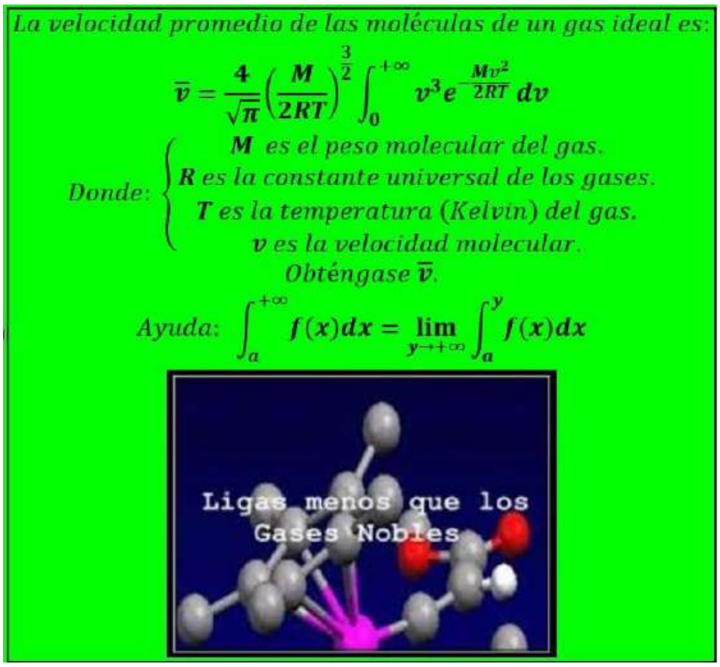
Solución a "Velocidad promedio de las moléculas de un gas"

Enunciado:



La velocidad promedio de las moléculas de un gas ideal es:

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\, dv$$

Donde:
- M *es el peso molecular del gas.*
- R *es la constante universal de los gases.*
- T *es la temperatura (Kelvin) del gas.*
- v *es la velocidad molecular.*

Obténgase $\overline{v}$.

Ayuda: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{y \to +\infty} \int_a^{y} f(x)dx$

Solución:

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{+\infty} v^3 \cdot e^{\frac{-M\cdot v^2}{2RT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \lim_{y \to +\infty} \int_0^{y} v^3 \cdot e^{\frac{-M\cdot v^2}{2RT}} dv$$

Llamemos $k = \frac{-M}{2RT}$ y calculemos $\int v^3 \cdot e^{k\cdot v^2} dv$

Para calcular dicha integral indefinida sustituiremos $u = k\cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{u}{k}$ e integraremos por partes:

$du = 2kv\, dv \Rightarrow v\, dv = \frac{du}{2k}$ y por tanto:

$$\int v^3 \cdot e^{k\cdot v^2} dv = \int v^2 \cdot e^u \cdot \frac{du}{2k} = \int \frac{u}{k} \cdot e^u \cdot \frac{du}{2k} = \frac{1}{2k^2} \cdot \int u \cdot e^u \cdot du$$

Ahora integramos por partes $\int u \cdot e^u \cdot du$:

Sea $w = u$; $dz = e^u \cdot du$; por tanto: $dw = du$; $z = e^u$.

Luego: $\int u \cdot e^u \cdot du = u \cdot e^u - \int e^u \cdot du = u \cdot e^u - e^u = e^u \cdot (u-1) + C_1$

Así pues: $\int v^3 \cdot e^{k \cdot v^2} dv = \frac{1}{2k^2} \cdot e^u \cdot (u-1) = \frac{1}{2k^2} \cdot e^{kv^2} \cdot (kv^2 - 1) = \frac{e^{kv^2} \cdot (kv^2-1)}{2k^2} + C$

Se tiene pues: $\int_0^y v^3 \cdot e^{kv^2} dv = \left. \frac{e^{kv^2} \cdot (kv^2-1)}{2k^2} \right|_0^y = \frac{e^{ky^2} \cdot (ky^2-1)+1}{2k^2}$

Y $\int_0^{+\infty} v^3 \cdot e^{kv^2} dv = \lim_{y \to +\infty} \int_0^y v^3 \cdot e^{kv^2} dv = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{ky^2} \cdot (ky^2-1)+1}{2k^2}$

Como $k = \frac{-M}{2RT}$ y

- ***M* (peso molecular de un gas):** El peso molecular de un gas es una propiedad física que siempre es positiva. Representa la masa de un mol de la sustacia.
- ***R* (constante universal de los gases):** La constante universal de los gases (R) es un valor positivo.
- ***T* (temperatura Kelvin del gas):** La temperatura en la escala Kelvin siempre es positiva. El cero absoluto (0 K) es la temperatura más baja posible, y cualquier otra temperatura será mayor que cero.

resulta que $k<0$ y por tanto: $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{ky^2} \cdot (ky^2-1)+1}{2k^2} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{e^{ky^2} \cdot (ky^2-1)}{2k^2} + \frac{1}{2k^2} \right) = \frac{1}{2k^2}$

Dicho límite, sustituyendo, sale: $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{ky^2} \cdot (ky^2-1)+1}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} = \frac{2R^2T^2}{M^2}$

Finalmente: $\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{M}{2RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2R^2T^2}{M^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{RT}{2M}} = \sqrt{\frac{16RT}{2M\pi}}$ (velocidad promedio)