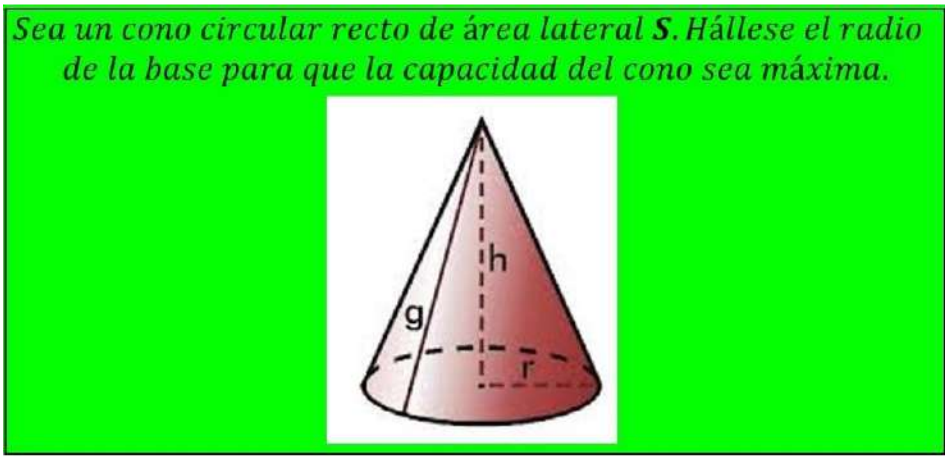
Solución al problema de "Capacidad del cono máxima para una superficie lateral dada"

Enunciado:

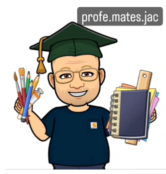


Solución:

El área lateral de un cono circular recto es: $S=A_{lat}=\pi\cdot r\cdot g\Rightarrow g=\dfrac{S}{\pi\cdot r}\Rightarrow g^2=\dfrac{S^2}{\pi^2\cdot r^2}$ y la capacidad o volumen de dicho cono es de: $V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$.

Por otro lado: $g^2=h^2+r^2$;

Luego: $\dfrac{S^2}{\pi^2\cdot r^2}=h^2+r^2\Rightarrow h^2=\dfrac{S^2}{\pi^2\cdot r^2}-r^2=\dfrac{S^2-\pi^2\cdot r^4}{\pi^2\cdot r^2}\Rightarrow h=\sqrt{\dfrac{S^2-\pi^2\cdot r^4}{\pi^2\cdot r^2}}$



Y la función volumen o capacidad nos queda en función de r:

$$V(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot\sqrt{\frac{S^2-\pi^2\cdot r^4}{\pi^2\cdot r^2}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{S^2\cdot r^2-\pi^2\cdot r^6}=\frac{1}{3}\cdot r\cdot\sqrt{S^2-\pi^2\cdot r^4}$$

O sea: $V(r)=\dfrac{1}{3}\cdot r\cdot\sqrt{S^2-\pi^2\cdot r^4}$ (función a maximizar)

Su derivada primera es: $V'(r)=\dfrac{S^2-3\cdot\pi^2\cdot r^4}{3\cdot\sqrt{S^2-\pi^2\cdot r^4}}$; que será cero solo si: $S^2-3\pi^2r^4=0$, o lo que es lo mismo ($r>0$): $r=\sqrt{\dfrac{S}{\sqrt{3}\cdot\pi}}$

Su derivada segunda sería:

$$\frac{-10\cdot\pi^2\cdot S^2\cdot r^3+6\cdot\pi^4\cdot r^7}{(3\cdot S^2-3\cdot\pi^2\cdot r^4)\cdot\sqrt{S^2-\pi^2\cdot r^4}}$$

que evaludada en $r=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\cdot\pi}}$ nos daría:

$$\frac{-4\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\cdot S\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cdot S}{3\cdot\pi}}}{3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot S^2}{3}}}$$

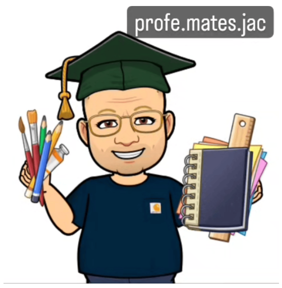
(cantidad que claramente es menor que cero)

Por tanto hay un máximo para dicho valor de ***r***.

Solución: la capacidad es máxima para el valor de $r=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\cdot\pi}}$

Y dicha capacidad máxima es de:

$$V(r)=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cdot S}{3\cdot\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot S^2}{3}}}{3}$$



José Antonio Cobalea