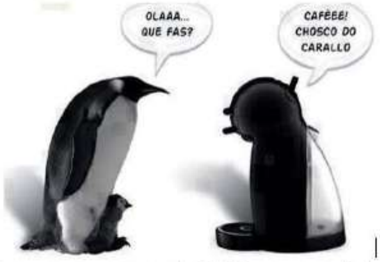
Solución al problema de "La taza de café"

Enunciado:



Una taza de café está a una temperatura de **93 ºC** en una sala donde la temperatura ambiente es de **23 ºC**. Según la ley de enfriamiento de Newton (*):

$\boxed{T(t) = A + C \cdot e^{-kt}}$, con t (minutos transcurridos) y consideremos $\boxed{k = \frac{1}{50}}$

a) ¿Cuál es el valor de las constantes A y C? AYUDA: Evalúense $T(0)$ y $\lim_{t \to +\infty} T(t)$

b) Si $\begin{cases} A = 23 \\ C = 70 \end{cases}$, ¿Cuál es la **temperatura media** del café durante los primeros **20** minutos?

c) ¿AL cabo de cuántos minutos la temperatura del café es igual a la temperatura media?

(*) Isaac Newton publicó anónimamente estos resultados en 1701 en la obra *"Scala graduum Caloris. Calorum Descriptiones & signa."*

Solución:

a) $T(t) = A + C \cdot e^{\frac{-t}{50}}$; sabemos que $93 = T(0) = A + C$.

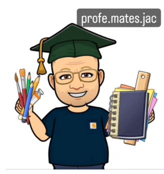
Por otro lado: $23 = \lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(A + C \cdot e^{\frac{-t}{50}} \right) = A \Rightarrow A = 23$ y por tanto:

$C = 93 - A = 93 - 23 = 70$.

Solución: ***A = 23*** y ***C = 70***

b) En este caso se tiene: $T(t) = 23 + 70 \cdot e^{\frac{-t}{50}}$; luego la temperatura media del café en los primeros 20 minutos es de:

$$T_{promedio} = \frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} T(t)\,dt = \frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} 23 + 70 \cdot e^{\frac{-t}{50}}\,dt$$



Pero: $\int \left(23 + 70 \cdot e^{\frac{-t}{50}} \right) dt = 23t - 3500 \cdot e^{\frac{-t}{50}} + C$

Luego:

$$T_{promedio}=\frac{1}{20}\cdot\int_0^{20} T(t)\,dt=\frac{1}{20}\cdot\int_0^{20} 23+70\cdot e^{\frac{-t}{50}}\,dt=\frac{1}{20}\cdot\left(23t-3500\cdot e^{\frac{-t}{50}}\right)\Bigg|_0^{20}=$$

$$=198-175\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}\approx 80{´}694\ ºC$$

c) Planteamos: $T(t)=23+70\cdot e^{\frac{-t}{50}}=198-175\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}$

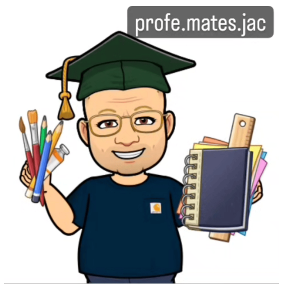
Obtenemos la ecuación: $70\cdot e^{\frac{-t}{50}}=175-175\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}=175\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}\right)\Rightarrow e^{\frac{-t}{50}}=\frac{5}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}\right)$

Aplicando logaritmos neperianos:

$$\frac{-t}{50}=\ln\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2\cdot\sqrt[5]{e^2}}\right)\Rightarrow t=-50\cdot\ln\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2\cdot\sqrt[5]{e^2}}\right)\approx 9{'}6671$$

$$9{'}6671\ min\approx 9\ min\ 40\ s$$

Solución: ***al cabo de 9 min 40 s*** (approx.)



José Antonio Cobalea