

Solución al problema de "Los alumnos de A Sonrisiña"

Enunciado:

El 65 % de los alumnos del I.E.S. "A Sonrisiña" padece una enfermedad psico-sexual cuyo principal síntoma es la fobia a los exámenes. En un grupo de 8 alumnos de M.E.N. (Métodos Estadísticos y Numéricos) elegidos al azar:

- Halle la probabilidad de que padezca dicha enfermedad al menos alguno de ellos.
Halle la probabilidad de más de seis de ellos la padezcan.
- Calcule el número más probable de alumnos enfermos, el número esperado y la desviación típica.
- Si elegimos al azar a 80 alumnos, calcule la probabilidad de que más de 53 padezcan la antedicha dolencia.



Solución:

a) Sea X la variable aleatoria correspondiente al número de alumnos que padecen dicha enfermedad en un grupo de 8 de M.E.N. X sigue una distribución binomial $B(8, 0.65)$, donde $n=8$ (número de alumnos) y $p=0.65$ la probabilidad de padecer la enfermedad (éxito).

La probabilidad de que al menos uno de ellos padezca la enfermedad es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \text{ (es más fácil de calcular por el suceso contrario)}$$

Pero en las distribuciones binomiales $B(n, p)$ sabemos que: $P(X=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$

$$\text{Luego: } P(X=0) = \binom{8}{0} \cdot 0.65^0 \cdot 0.35^8 \approx 0.000225 \text{ y } P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx \mathbf{0.99977}$$

La probabilidad de que más de 6 la padezcan es: $P(X > 6) = P(X=7) + P(X=8)$

$$P(X=7)=\binom{8}{7}\cdot 0.65^7\cdot 0.35^1\approx 0.137262$$

$$P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot 0.65^8\cdot 0.35^0\approx 0.031864$$

$$P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)\approx 0.169126$$

b) El número más probable es el valor de X con mayor probabilidad. En una distribución binomial, se calcula como el mayor entero menor o igual que $(n+1)\cdot p$; en nuestro caso:

$(8+1)\cdot 0.65=5.85$ y el mayor entero menor o igual que 5.85 es **5**.

$$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0.65^0\cdot 0.35^8\approx 0.000225$$

$$P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0.65^1\cdot 0.35^7\approx 0.003346$$

$$P(X=2)=\binom{8}{2}\cdot 0.65^2\cdot 0.35^6\approx 0.021747$$

$$P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot 0.65^3\cdot 0.35^5\approx 0.080773$$

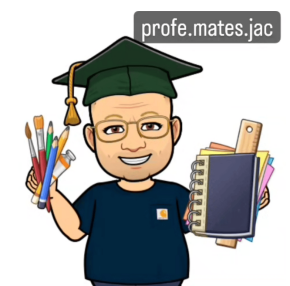
$$P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0.65^4\cdot 0.35^4\approx 0.187510$$

$$P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0.65^5\cdot 0.35^3\approx 0.278586$$

$$P(X=6)=\binom{8}{6}\cdot 0.65^6\cdot 0.35^2\approx 0.258687$$

$$P(X=7)=\binom{8}{7}\cdot 0.65^7\cdot 0.35^1\approx 0.137262$$

$$P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot 0.65^8\cdot 0.35^0\approx 0.031864$$



El número esperado o valor esperado es: $n\cdot p=8\cdot 0.65=5.2$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{8 \cdot 0.65 \cdot 0.35} \approx 1.349074$

c) Al ser ahora n grade (80) y $n \cdot p = 80 \cdot 0.65 = 52 \geq 5$ y $n \cdot (1-p) = 80 \cdot 0.35 = 28 \geq 5$ podemos aproximar la binomial $B(80, 0.65)$ por una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde:

$$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0.65 = 52$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot 0.65 \cdot 0.35} \approx 4.266146$$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 52}{4.266146}$ que sigue una distribución $N(0,1)$.

Y, por tanto, $X = 4.266146 Z + 52$ y

$$P(X > 53) = P(4.266146 Z + 52 > 53) = P\left(Z > \frac{1}{4.266146}\right) \approx 1 - P(Z < 0.23) = 1 - 0.5910$$

Por tanto: $P(X > 53) \approx 0.409$



José Antonio Cobalea