Solución al problema de “Los alumnos de A Sonrisiña”

Enunciado:

El **65 %** de los alumnos del I.E.S. *“A Sonrisiña”* padece una enfermedad psico-sexual cuyo principal síntoma es la fobia a los exámenes. En un grupo de **8** alumnos de M.E.N. *(Métodos Estadísticos y Numéricos)* elegidos al azar:

a) Halle la probabilidad de que padezca dicha enfermedad al menos alguno de ellos. Halle la probabilidad de más de seis de ellos la padezcan.

b) Calcule el número más probable de alumnos enfermos, el número esperado y la desviación típica.

c) Si elegimos al azar a **80** alumnos, calcule la probabilidad de que más de 53 padezcan la antedicha dolencia.

Solución:

a) Sea X la variable aleatoria correspondiente al número de alumnos que padecen dicha enfermedad en un grupo de 8 de M.E.N. X sigue una distribución binomial ***B(8, 0.65)***, donde *n=8* (número de alumnos) y *p=0.65* la probabilidad de padecer la enfermedad (éxito).

La probabilidad de que al menos uno de ellos padezca la enfermedad es:

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$ (es más fácil de calcular por el suceso contrario)

Pero en las distribuciones binomiales B(n, p) sabemos que: $P(X=r)=\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$

Luego: $P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0.65^0\cdot 0.35^8\approx 0.000225$ y $P(X\geq 1)=1-P(X=0)\approx 0.99977$

<u>La probabilidad de que *más de 6 la padezcan*</u> es: $P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)$

$$P(X=7)=\binom{8}{7}\cdot 0.65^{7}\cdot 0.35^{1}\approx 0.137262$$

$$P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot 0.65^{8}\cdot 0.35^{0}\approx 0.031864$$

$$P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)\approx 0.169126$$

b) El número más probable es el valor de ***X*** con mayor probabilidad. En una distribución binomial, se calcula como el mayor entero menor o igual que $(n+1)\cdot p$; en nuestro caso:

$(8+1)\cdot 0.65=5.85$ y el mayor entero menor o igual que 5.85 es ***5***.

$$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0.65^{0}\cdot 0.35^{8}\approx 0.000225$$

$$P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0.65^{1}\cdot 0.35^{7}\approx 0.003346$$

$$P(X=2)=\binom{8}{2}\cdot 0.65^{2}\cdot 0.35^{6}\approx 0.021747$$

$$P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot 0.65^{3}\cdot 0.35^{5}\approx 0.080773$$

$$P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0.65^{4}\cdot 0.35^{4}\approx 0.187510$$

$$P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0.65^{5}\cdot 0.35^{3}\approx 0.278586$$

$$P(X=6)=\binom{8}{6}\cdot 0.65^{6}\cdot 0.35^{2}\approx 0.258687$$

$$P(X=7)=\binom{8}{7}\cdot 0.65^{7}\cdot 0.35^{1}\approx 0.137262$$

$$P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot 0.65^{8}\cdot 0.35^{0}\approx 0.031864$$

El número esperado o valor esperado es: $n\cdot p=8\cdot 0.65=5.2$

La desviación típica es: $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{8\cdot 0.65\cdot 0.35}\approx \mathbf{1.349074}$

c) Al ser ahora ***n*** grade (80) y $n\cdot p=80\cdot 0.65=52\geq 5$ y $n\cdot(1-p)=80\cdot 0.35=28\geq 5$ podemos aproximar la binomial ***B(80, 0.65)*** por una distribución normal $N(\mu,\sigma)$, donde:

$$\mu=n\cdot p=80\cdot 0.65=52$$

$$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{80\cdot 0.65\cdot 0.35}\approx 4.266146$$

Tipificamos la variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-52}{4.266146}$ que sigue una distribución ***N(0,1)***.

Y, por tanto, $X=4.266146\,Z+52$ y

$$P(X>53)=P(4.266146\,Z+52>53)=P\left(Z>\frac{1}{4.266146}\right)\approx 1-P(Z<0.23)=1-0.5910$$

Por tanto: $P(X>53)\approx 0.409$

José Antonio Cobalea