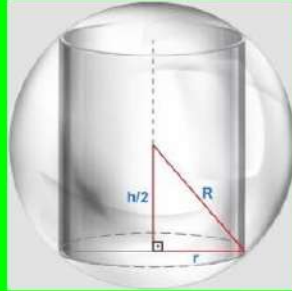


Solución al problema de "Solución a "Radio y altura del cilindro circular recto"

Enunciado:

Determine el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en una esfera de radio $R = a$. ¿Cuál es la mayor área lateral obtenida?



Solución:

La altura del cilindro es h , el radio de la base es r y el radio de la esfera es $R = a$ (ver gráfica del enunciado).

$$\text{Por tanto: } a^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow h^2 = 4 \cdot (a^2 - r^2) \Rightarrow h = 2 \cdot \sqrt{a^2 - r^2}$$

Por otro lado, el área lateral del cilindro es: $A_L(r) = 2\pi \cdot r \cdot h = 4\pi \cdot r \cdot \sqrt{a^2 - r^2}$ (área lateral que ha de ser máxima).

$$A'_L(r) = 4\pi \cdot \sqrt{a^2 - r^2} + 4\pi \cdot r \cdot \frac{-2r}{2 \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} = 4\pi \cdot \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{4\pi r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{4\pi a^2 - 8\pi r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$A'_L = 0 \Leftrightarrow 0 = 4\pi a^2 - 8\pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$A''_L(r) = \frac{8\pi r^3 - 12\pi a^2 r}{(a^2 - r^2) \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}$$

Luego: $A''_L\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = -16\pi < 0$ (hay un máximo para $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$) y para dicho valor de r su

altura será de: $h = 2 \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a \cdot \sqrt{2}$.

En resumen:



El mayor área lateral del cilindro se obtiene para $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ y $h = a\sqrt{2}$.

El valor máximo de dicha área lateral del cilindro sería de:

$$A_L\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 4\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{4\pi a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\pi a^2$$



José Antonio Cobalea