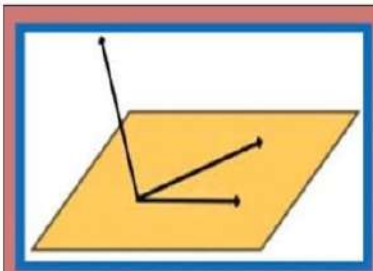
Solución al problema de "Vectores linealmente independientes y cálculo de t"

Enunciado:



Probar que los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$ son linealmente independientes. Hallar el valor de t para el cual el vector $\vec{w} = (8, -5, t)$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

Una forma fácil de demostrar que son linealmente independientes es expresarlo como una matriz (en cada fila aparece el vector) y encontrar un menor no nulo de orden 2.

En nuestro caso: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y un menor no nulo de la misma sería: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Así pues, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.

Otra forma de verlo (con la propia definición):

$$\vec{0} = \lambda \vec{u} + \omega \vec{v} = \lambda \cdot (2, -1, 0) + \omega \cdot (1, 0, 1) = (2\lambda + \omega, -\lambda, \omega) = (0, 0, 0)$$

Y de ahí nos sale que: $\lambda = \omega = 0$; por tanto la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de ellos es la trivial (multiplicándolos por 0); por lo que los dos vectores son linealmente independientes.

Calculemos t para el vector $\vec{w}$:

$\vec{w} = (8, -5, t) = \lambda \vec{u} + \omega \vec{v} = (2\lambda + \omega, -\lambda, \omega)$; igualando nos sale que:

$\lambda = 5,\ \omega = t,\ 10 + t = 8$, de donde $t = -2$

Solución: *t = -2*

Otra forma de calcular ***t***:

$$0=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 8 & -5 & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+t\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2+t\Rightarrow \boldsymbol{t=-2}$$

José Antonio Cobalea