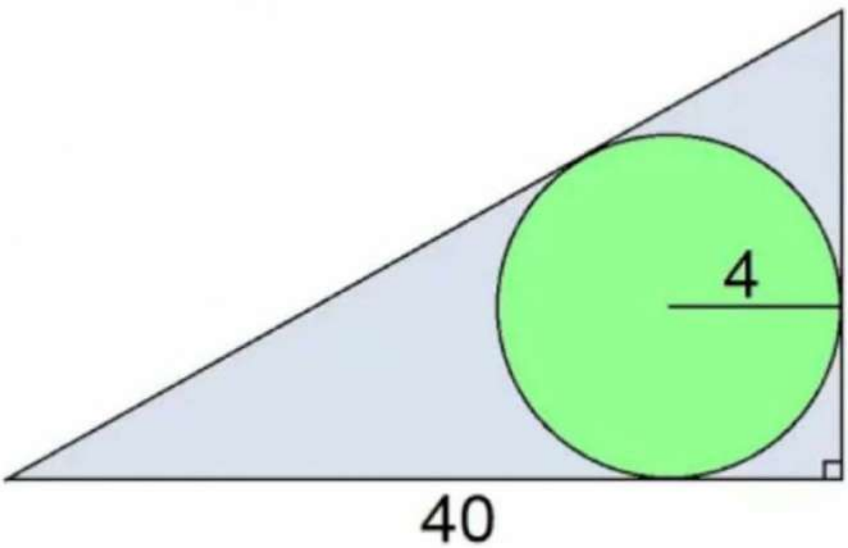
Solución a "Resuelve este triángulo rectángulo calculando antes la altura sobre el lado conocido"

Enunciado:



Solución:

Llamemos ***b* = 40**, ***a* = altura sobre el lado conocido** y ***c* a la hipotenusa**.

En cualquier triángulo el radio de la circunferencia inscrita al mismo es igual a:

$r=\frac{A}{s}$, donde ***A*** es el área del triángulo y ***s*** es su semiperímetro.

Demostración:

La circunferencia inscrita tiene centro en *O* que es la intersección de las bisectrices interiores de los ángulos del triángulo. La distancia desde O a cada lado del triángulo es igual al radio (***r***) de dicha circunferencia inscrita. Si unimos cada vértice del triángulo con el centro O obtenemos tres triángulos que llenan nuestro triángulo y cuyas alturas a cada uno de los lados del triángulo original (***a*, *b*, *c***) es ***r*** . Por tanto:

$A=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}$, donde ***a***, ***b*** y ***c*** son los lados del triángulo original.

Por tanto: $A=\frac{a+b+c}{2}\cdot r\Rightarrow r=\frac{2A}{P}\Rightarrow r=\frac{A}{0.5\cdot P}=\frac{A}{s}$ (siendo ***P*** el perímetro del triángulo original)

Ya queda demostrado.

En el caso de un triángulo rectángulo de catetos ***a***, ***b*** e hipotenusa ***c***:

$$r=\frac{\frac{a\cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{a\cdot b}{a+b+c}=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a+b-c)}=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2}=\frac{a+b-c}{2}$$

que es la fórmula comúnmente usada: $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Vayamos ya a nuestro problema:

El radio es 4 (***r = 4***); $4=\frac{a+40-\sqrt{40^2+a^2}}{2}\Rightarrow\sqrt{40^2+a^2}-a=32\Rightarrow\sqrt{40^2+a^2}=a+32$

Es una ecuación irracional.

La elevamos al cuadrado: $1600+a^2=a^2+64a+1024\Rightarrow 64a=576\Rightarrow a=\frac{576}{64}=9$

La comprobamos (siempre hay que hacerlo) en la ecuación original:

$$¿\sqrt{40^2+9^2}-9=32?\Leftrightarrow ¿41-9=32?\ \textit{SÍ}$$

Por tanto la altura ***a mide 9***.

La hipotenusa, por tanto, valdrá:

$$c=\sqrt{40^2+9^2}=41$$

Llamando $\hat{A}$ al ángulo opuesto al lado ***a*** obtenemos:

$$\tan\hat{A}=\frac{9}{40}\approx\hat{A}=12^{o}\ 40'\ 49.38''$$

Y el ángulo que falta $\hat{B}=90^{o}-\hat{A}\approx 77^{o}\ 19'\ 10.62''$