Solución a "Continuidad y derivabilidad de una función a trozos"

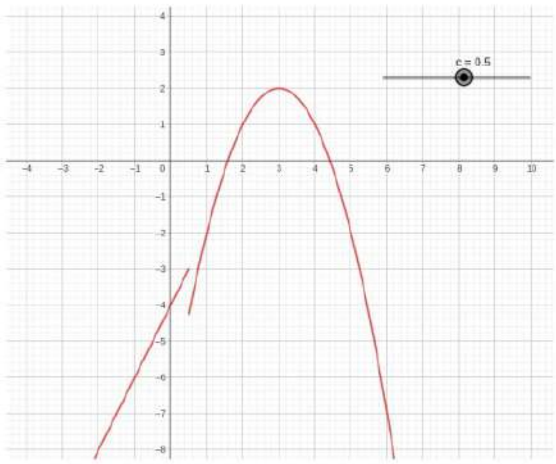
Enunciado:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si\ x\le c \\ -(x-3)^2+2 & si\ x>c \end{cases}$;

a) *¿Para qué valor de **c** la función **f(x)** es continua en x=c?*

b) *Representa gráficamente la función **f(x)** para el valor o valores de **c** hallados en el apartado anterior.*

c) *¿Es f una función derivable? Razona la respuesta.*



Solución:

Al ser cada rama de la función ***f*** una función polinómica es continua y derivable en dichas ramas excepto quizás en el punto ***c***. Es el punto que hay que estudiar. Veamos la continuidad en dicho punto *(apartado a)*:

a) Para que sea continua en **c** ha de cumplirse: $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$; pero:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=2c-4=f(c) \text{ y } \lim_{x\to c^+} f(x)=2-(c-3)^2=-c^2+6c-7$$

Así que tiene que darse: $2c-4=-c^2+6c-7 \Leftrightarrow c^2-4c+3=0 \Rightarrow c_1=1\ ;\ c_2=3$

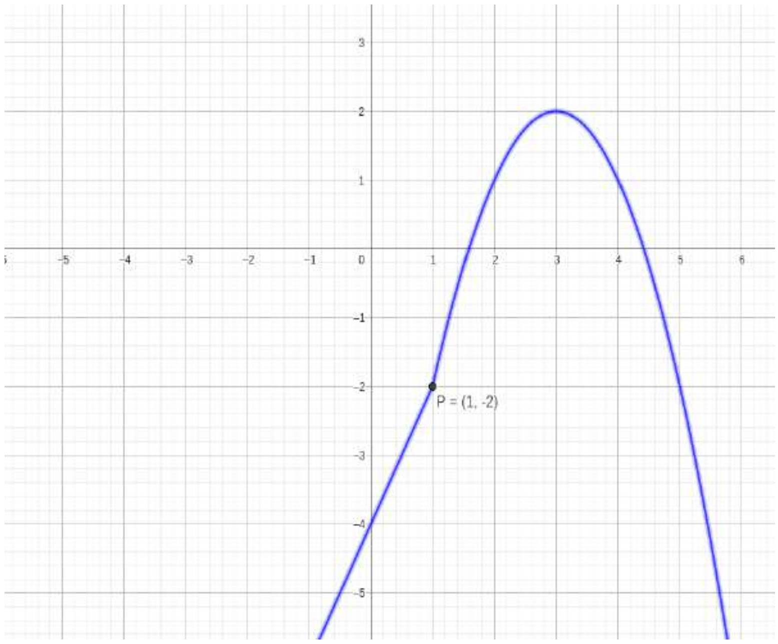
Solución: *hay dos valores de c (1 y 3)*

https://profematesjac.wordpress.com/

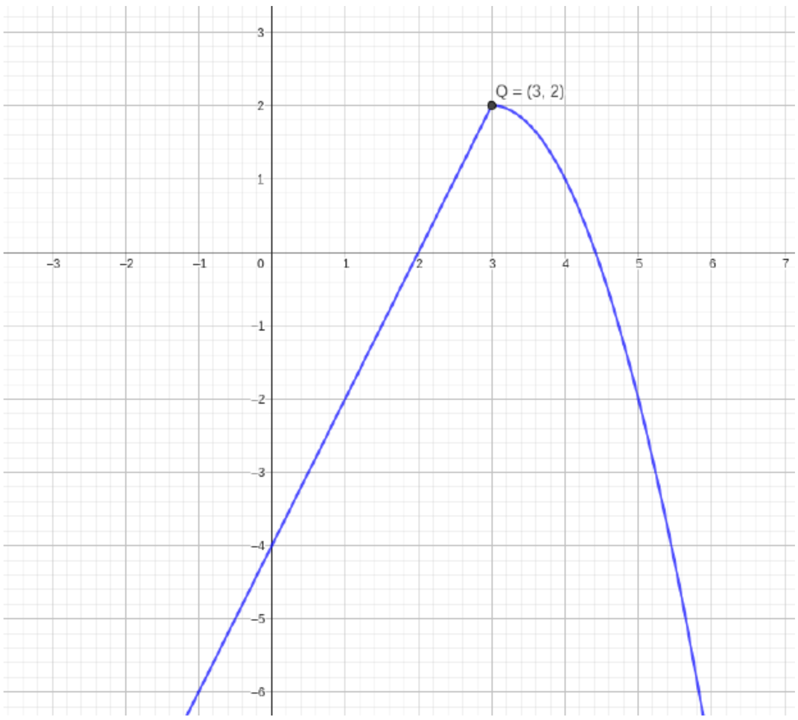
José Antonio Cobalea

b)

Para c=1:



Para c=3:



c) Para que sea una función derivable lo ha de ser en su dominio y también, por tanto, en el punto ***c*** (en los demás puntos distintos a ***c*** sí es derivable por lo expuesto anteriormente); para que esto ocurra es necesario que ***f*** sea continua en ***c*** (ya que si no es continua no es derivable en dicho punto ***c***).

<u>Veamos los dos casos (***c=1*** y ***c=3***):</u>

<u>Caso c=1</u>:

La función en este caso sería: $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si\ x\leq 1 \\ -(x-3)^2+2 & si\ x>1 \end{cases}$

Para que sea derivable en el 1 se tendría que dar $f'(1^-)=f'(1^+)$ (derivadas laterales han de coincidir); pero: $f'(1^-)=2$ y $f'(1^+)=-2+6=4$ (no coinciden).

Esta función ***no es derivable para c=1***.

<u>Caso c=3</u>:

La función en este caso sería: $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si\ x\leq 3 \\ -(x-3)^2+2 & si\ x>3 \end{cases}$

Para que sea derivable en el 3 se tendría que dar $f'(3^-)=f'(3^+)$ (derivadas laterales han de coincidir); pero: $f'(3^-)=2$ y $f'(3^+)=-6+6=0$ (no coinciden).

Esta función ***no es derivable para c=3***.

Solución: ***esta función f no es derivable***