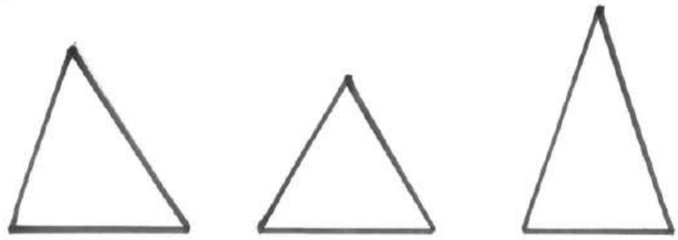
Solución a "Cuestiones sobre un triángulo de lados conocidos"

Enunciado:



Se considera un triángulo de lados $a=\sqrt{54}$, $b=\sqrt{36}$ y $c=\sqrt{27}-3$; contesta razonadamente a estas cuestiones:

a) *¿Qué tipo de triángulo es atendiendo a sus lados y a sus ángulos?*

b) *Halla el área de dicho triángulo.*

c) *Calcula el área del círculo correspondiente a la circunferencia inscrita en el mismo.*

d) *Averigua el radio del círculo correspondiente a la circunferencia circunscrita en dicho triángulo.*

e) *Calcula la superficie comprendida entre las dos circunferencias de los dos apartados anteriores.*

Solución:

a) $a=\sqrt{54}=3\cdot\sqrt{6}$, $b=\sqrt{36}=6$ y $c=3\cdot\sqrt{3}-3$; claramente $a>b>c$

Se trata de un triángulo escaleno (sus tres lados son distintos).

Además: $a^2=54$, $b^2=36$ y $c^2=36-18\cdot\sqrt{3}$; claramente $a^2>b^2+c^2$, por lo que el triángulo es obtusángulo.

b) Para hallar el ángulo de dicho triángulo usaremos la fórmula de Herón:

$A_{triángulo}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$, donde s es el semiperímetro del triángulo:

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

En nuestro caso: $s=\dfrac{3\cdot\sqrt{6}+6+3\cdot\sqrt{3}-3}{2}=\dfrac{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+1\right)}{2}$

Por tanto:

$$s-a=\frac{3\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1\right)}{2}\ ;\ s-b=\frac{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\right)}{2}\ ;\ s-c=\frac{3\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\right)}{2}$$

Luego:

$$A_{triángulo}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=\sqrt{\frac{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+1\right)}{2}\cdot\frac{3\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1\right)}{2}\cdot\frac{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\right)}{2}\cdot\frac{3\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\right)}{2}}$$

$$A_{triángulo}=\frac{9\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)}{4}\approx 5'7058\ u^2$$ (unidades cuadradas)

c) El radio del círculo correspondiente a la circunferencia inscrita es:

$r=\dfrac{A_{tri}}{s}$, donde s es el semiperímetro del triángulo.

En nuestro caso: $r=\dfrac{A_{tri}}{s}=\dfrac{9\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)}{4}\div\dfrac{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+1\right)}{2}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\right)}{2}$

Y el área del círculo será: $A_{insc}=\pi\cdot r^2=\dfrac{9\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\right)^2}{4}\cdot\pi\approx 1'69308\ u^2$

d) El radio del círculo correspondiente a la circunferencia circunscrita es:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot A_{triángulo}}=\frac{3\sqrt{6}\cdot 6\cdot\left(3\sqrt{3}-3\right)}{9\left(6-2\sqrt{3}\right)}=3\sqrt{2}$$

d) El área del círculo correspondiente a la circunferencia circunscrita es:

$$A_{circuns}=\pi\cdot R^2=18\cdot\pi\ u^2$$ (unidades cuadradas)

https://profematesjac.wordpress.com/

El área del círculo correspondiente a la circunferencia inscrita es:

$$A_{insc}\frac{9\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\right)^{2}}{4}\cdot\pi\ u^{2}\ \text{(unidades cuadradas)}$$

La diferencia entre ambas es de:

$$A_{circuns}-A_{insc}=18\pi-\frac{9\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\right)^{2}\cdot\pi}{4}\approx 54'8556\ u^{2}$$

(unidades cuadradas)