

Solución a “Determine la matriz cuadrada X ”

Enunciado:

Determine una matriz cuadrada X que verifique $A \cdot X + X \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego, analice si la matriz X es regular o no y, en el caso de serlo, calcule $A^{-1} \cdot X^{-1} + A$.

Solución:

Llamemos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & 2b \\ a+2c+d & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$2a+b=2 ; 2b=-2 \Rightarrow b=-1 ; a=\frac{3}{2} \text{ y } b+2d=3 \Rightarrow d=2 . \text{ Por otra parte:}$$

$$a+2c+d=3 \Rightarrow c=\frac{-1}{4}$$

Con lo que la matriz X es:
$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

La matrix X es regular pues: $\det(X) = \begin{vmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/4 & 2 \end{vmatrix} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \neq 0$



Calculemos antes la matriz inversa de A ($\det(A) = 1$):

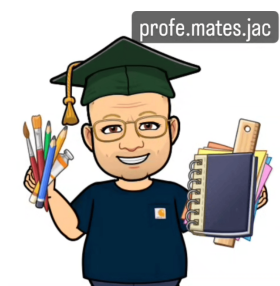
$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}(A))^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{Adj}(A))^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrix inversa de X sería:

$$\text{Adj}(X) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}(X))^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ y } X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \cdot (\text{Adj}(X))^T = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

Finalmente hemos de hacer:

$$A^{-1} \cdot X^{-1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{7}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \end{pmatrix}$$



José Antonio Cobalea