Solución a "Discute y resuelve si es compatible indeterminado"

Enunciado:

DISCUTIR Y RESOLVER UN SISTEMA

Consideremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay+z=a \end{cases}$$

Se pide: ***clasificarlo según los valores del parámetro <u>a</u> y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado, dando al menos para ese caso tres soluciones distintas.***

Solución:

Escribamos la matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$; en ella vemos que el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$, por lo que el *rango de A es mayor o igual a 2* (es 2 ó es 3, dependiendo de ***a***).

Veamos cuando es 2:

$0=det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix}-a\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}=-2a-a\cdot(3-a)=a^2-5a=a\cdot(a-5)$; <u>***cuando a=0 ó a=5***</u>.

<u>Luego, si $a\neq 0$ y $a\neq 5$ el rango de A es 3</u>, igual que el rango de la matriz ampliada ***(A:B)***:

$(A:B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}$, por lo que el sistema será compatible determinado (solución única).

Estudiemos los casos a=0 y a=5 por separado:

Caso a=0:

$(A:B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que equivale a: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones vienen dadas por las ternas:

$$\{(5-3y, y, 0),\ y\in\mathbb{R}\}$$

Tres soluciones distintas para este caso (a=0) podrían ser:

$$\{(5,0,0),\ (2,1,0)\ (8,-1,0)\}$$

Caso a=5:

$(A:B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y el menor de la misma $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=-20\neq 0$ con lo que el rango de la matriz ampliada es 3. Como el rango, en este caso, de la matriz de coeficientes era 2, no coinciden ambos rangos y el sistema es incompatible (no tiene solución).