

Solución a “Dos cuestiones sobre matrices”

Enunciado:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Responde a las dos cuestiones siguientes:

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real *no nulo*, comprueba que $A^{-1} \cdot B = A$.

b) Halla el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro m .

Solución:

a) Vamos a calcular la matriz inversa de A : A^{-1}

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -a^2 \neq 0; \text{ entonces } A \text{ tiene inversa.}$$

Calculemos la matriz adjunta de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -a & 2 & a \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}; \text{ la trasponemos, obteniendo: } (\text{Adj}(A))^T = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Y finalmente su inversa será: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{Adj}(A))^T$; o sea:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-1}{a} & 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ ahora finalmente multiplicamos esta matriz por la matriz } B:$$



$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \text{ (comprobado)}$$

b) $\text{rang}(\mathbf{M}) = \text{rang}(\mathbf{M}^T)$

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -1 & 6 & -10 \\ -1 & 9 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & m+5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & m+15 \end{pmatrix}$$

Llegado a este punto observamos que si $m \neq -15$ el rango es 3. Si $m = -15$ el rango es 2.

Solución: si $m \neq -15$ el rango de M es 3. Si $m = -15$ el rango de M es 2.



José Antonio Cobalea