

Solución a "Halla las tres integrales indefinidas"

Enunciado:



Halla las tres integrales indefinidas:

a) $\int \frac{4x^3 - 5x^2 - 4x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2} dx$

b) $\int \frac{dx}{35x + x \cdot \ln(3x)^7}$

c) $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$



Solución:

a) $\frac{4x^3 - 5x^2 - 4x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}$; al tenerse que $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1) \cdot (x^2+1)$

resulta

$$\frac{4x^3 - 5x^2 - 4x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x^2+1)}$$

Y por tanto:

$$4x^3 - 5x^2 - 4x + 1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)(x-1)$$

Para $x = 1$: $-4 = -2B \Leftrightarrow B = 2$

Para $x = 2$: $5 = 5A \Leftrightarrow A = 1$

Para $x = 0$: $1 = -A - 2B + 2D = -1 - 4 + 2D \Leftrightarrow D = 3$

Para $x = -1$: $-4 = -4A - 6B + 6(-C+D) = -4 - 12 + 6(-C+3) \Leftrightarrow 2 = 3 - C \Leftrightarrow C = 1$



Por tanto: $\frac{4x^3-5x^2-4x+1}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{x+3}{x^2+1}$

Así pues: $\int \frac{4x^3-5x^2-4x+1}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{x+3}{x^2+1} dx$

Como $\int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) + 3 \cdot \arctan x + K$, resulta:

$\int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \ln|x-2| + 2 \cdot \ln|x-1| + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) + 3 \cdot \arctan x + C$

Lo que equivale a:

$\ln(|x-2| \cdot (x-1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}) + 3 \cdot \arctan x + C$ (solución)

b) $\frac{dx}{35x+x \cdot \ln(3x)^7} = \frac{dx}{7x \cdot (5+\ln(3x))}$; hacemos el cambio de variable: $t = 5 + \ln(3x)$, con

lo que $dt = \frac{dx}{x}$ y por tanto:

$\int \frac{dx}{35x+x \cdot \ln(3x)^7} = \int \frac{dx}{7x \cdot (5+\ln(3x))} = \int \frac{dt}{7 \cdot t} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{7} \cdot \ln|t| = \ln(|t|)^{\frac{1}{7}} = \ln \sqrt[7]{|t|} + C$

Deshaciendo el cambio nos queda:

$\int \frac{dx}{35x+x \cdot \ln(3x)^7} = \ln \sqrt[7]{|5+\ln(3x)|} + C$ (solución)

c) Para calcular la integral $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$ hacemos el cambio de variable $t = \sin x$, con lo que $dt = \cos x dx$; luego: $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int (1-t^2) \cdot t^4 dt$

Y nos queda: $\int (1-t^2) \cdot t^4 dt = \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$ (solución)