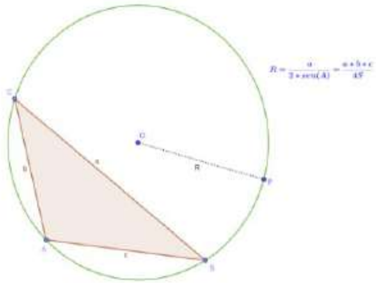
Solución a “Radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo”

Enunciado:



Se tiene un triángulo de lados ***a***, ***b*** y ***c***. Se considera la circunferencia circunscrita al mismo cuyo radio llamamos ***R***.

a) Usando el concepto de ángulo inscrito y ángulo central correspondiente a la cuerda en una circunferencia demuestra que:

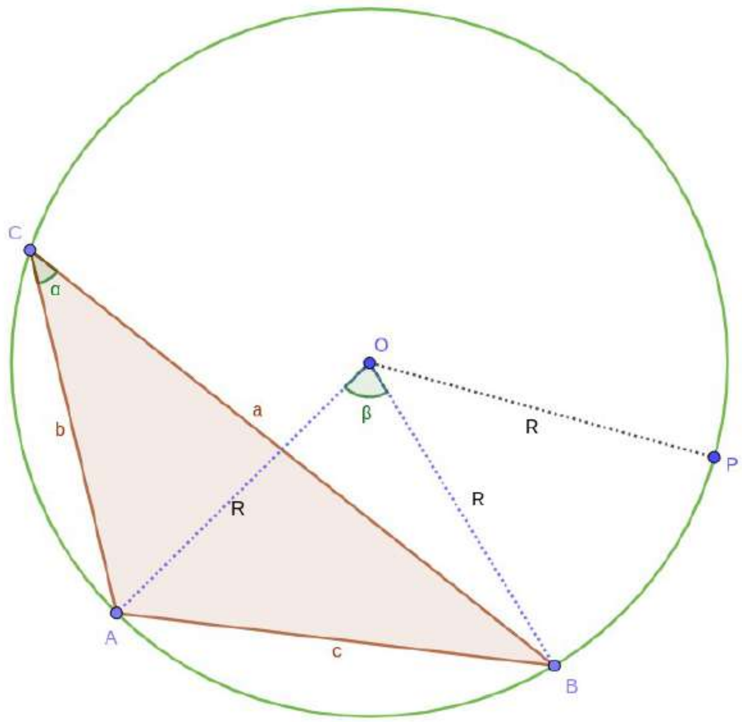
$$R=\frac{a}{2\cdot sen\,\hat{A}}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S}$$

donde el ángulo $\hat{A}$ es el ángulo opuesto al lado ***a*** y ***S*** es la superficie del triángulo.

b) Como aplicación calcula el área correspondiente al círculo delimitado por la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo que tiene un cateto de 20 m y 29 m de hipotenusa.

Solución:

a) Consideremos la situación en este dibujo:



El ángulo inscrito en una circunferencia, que subtiende una cuerda, es la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.

En nuestro caso el ángulo inscrito que subtiende la cuerda $\boldsymbol{c}$ es $\boldsymbol{\alpha}$ y el ángulo central que subtiende el mismo arco es $\boldsymbol{\beta}$.

Así pues: $\boldsymbol{\beta=2\cdot\alpha}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo isósceles ***AOB*** tenemos:

$$c^2=R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos\beta=2R^2-2R^2\cdot\cos(2\alpha)=2R^2\cdot(1-\cos(2\alpha))=2R^2\cdot 2\cdot sen^2\alpha$$

(sustituyendo el coseno del ángulo doble)

pero como $\alpha=\hat{C}$ en el triángulo ***ABC*** , tenemos:

$c^2=4R^2\cdot sen^2\hat{C}\Rightarrow c=2R\cdot sen\hat{C}\Rightarrow R=\dfrac{c}{2\cdot sen\hat{C}}$; al tener en el triángulo ***ABC*** el teorema de los senos obtenemos que:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}\Leftrightarrow\frac{a}{2\cdot sen\hat{A}}=\frac{b}{2\cdot sen\hat{B}}=\frac{c}{2\cdot sen\hat{C}}=R$$

Así pues: $R=\dfrac{a}{2\cdot sen\hat{A}}$ *(primera parte de la fórmula que queríamos ver)*

Si ahora multiplicamos por $\boldsymbol{b\cdot c}$ tanto el numerador como el denominador obtenemos:

$$R=\frac{a}{2\cdot sen\hat{A}}=\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot b\cdot c\cdot sen\hat{A}}$$

pero como el área o superficie de un triángulo conociendo sus dos lados $b\ y\ c$ y el ángulo comprendido entre ambos $\hat{A}$ es $S=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot sen\hat{A}$, resulta $2\cdot S=b\cdot c\cdot sen\hat{A}$ y, sustituyendo en la expresión anterior nos queda:

$$R=\frac{a}{2\cdot sen\hat{A}}=\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot b\cdot c\cdot sen\hat{A}}=\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot 2S}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S}$$ *c.p.d*

b) El triángulo rectángulo tiene como cateto *20 m* y su hipotenusa es *29 m*. Por tanto, el otro cateto es $x^2=29^2-20^2=441 \Rightarrow x=21$ (***21 m***).

El área de dicho triángulo rectángulo es $S=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210$ m^2

El radio, ***R***, de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo rectángulo (*según lo demostrado en el apartado anterior*) es:

$$R=\frac{20\cdot 21\cdot 29}{4\cdot 210}=\frac{29}{2}$$

Finalmente el área del círculo que delimita dicha circunferencia es:

$$A_{círculo}=\pi\cdot R^2=\pi\cdot\left(\frac{29}{2}\right)^2=\frac{841}{4}\cdot\pi\ \ m^2\approx 660'5199\ m^2$$

José Antonio Cobalea