

Solución a "Matriz inversa"

Enunciado:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

- a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa?
b) Halla la matriz inversa de A cuando $a = 1$.

Solución:

- a) Calculemos el determinante de A para ver qué valores no lo anulan (dichos valores serán los que determinen que la matriz A tiene inversa).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (4 - a + 1) + 3 \cdot (-2a + 2 - 6)$$

$$\det(A) = 20 - 4a - 6a - 12 = 8 - 10a$$

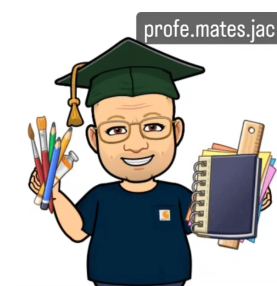
El determinante de A es cero sólo cuando $8 - 10a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$

Solución: la matriz A tiene inversa siempre que el valor de " a " no sea $\frac{4}{5}$.

- b) Supongamos que $a = 1$:

Calculemos su inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$(A:I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \text{ dividimos la fila 1 entre -2:}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; -3F_1 + F_2 \rightarrow F_2; -4F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \text{ y obtenemos:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{dividimos la fila 2 entre 3:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; F_1 + F_2 \rightarrow F_1; -4F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \text{ y obtenemos:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & 1 \end{pmatrix}; \text{multiplicamos por 3 la tercera fila:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}; \frac{-2}{3}F_3 + F_1 \rightarrow F_1; -\frac{7}{6}F_3 + F_2 \rightarrow F_2 \text{ y obtenemos:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}; \text{y ya tenemos nuestra matriz inversa:}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & \frac{-7}{2} \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ (cuando } a = 1 \text{)}$$

