Solución a “Paciente con diabetes”

Enunciado:

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (*mg/dl*) del paciente, en cada instante ***t*** (horas), es:

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right) & si\ 0\le t\le 12 \\ t^2-40t+546 & si\ 12<t\le 24 \end{cases}$$

a) Halle en qué períodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.

b) ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?

c) ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

Solución:

Veamos si ***f*** es una función continua y derivable.

Al ser polinómica en ambas ramas (solo lo tenemos que comprobar en el punto de ruptura o cambio ***t=12***).

Veamos la continuidad en dicho punto:

$$f(12)=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{12^3}{3}-12\cdot 12^2+108\cdot 12+108\right)=210$$

$$\lim_{\substack{t\to 12\\ t<12}} f(t)=210 \text{ y } \lim_{\substack{t\to 12\\ t>12}} f(t)=210$$

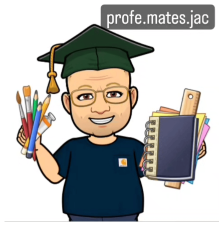
La función es continua en todo su dominio.

La función es derivable en ambas ramas (solo lo tenemos que comprobar en el punto de ruptura o cambio ***t=12***).

$f'(t)=\frac{5}{6}t^2-20t+90 \;\; si \;\; t<12$ y $f'(t)=2t-40 \;\; si \;\; t>12$; por tanto:

La derivada lateral izquierda en ***t=12*** es -30 y la lateral derecha es -16, luego f no es derivable en ***t=12***.

a) La derivada de la función f queda como sigue:



$$f'(t)=\begin{cases} \frac{5}{6}t^2-20t+90 & si \;\; 0<t<12 \\ 2t-40 & si \;\; 12<t<24 \end{cases}$$

Estudiemos cada rama por separado:

I) ***Si 0<t<12,*** $f'(t)=\frac{5}{6}t^2-20t+90=\frac{5}{6}\cdot(t-18)\cdot(t-6)$ y dicha derivada es positiva en el intervalo (0, 6) y negativa en el intervalo (6, 12).

Así pues: ***el nivel de glucosa aumenta desde las 0 h hasta las 6 h.***

II) ***Si 12<t<24,*** $f'(t)=2t-40=2\cdot(t-20)$ y dicha derivada es positiva en el intervalo (20, 24) y negativa en el intervalo (12, 20).

Así pues: el nivel de glucosa aumenta desde las 20 h hasta las 24 h.

b) Igualamos a cero la primera derivada en cada uno de los dos intervalos y calculamos sus máximos y mínimos (teniendo en cuenta también ***f(0)= 90***, ***f(12)=210*** y ***f(24)=162***).

I) ***Si 0<t<12,*** $f'(t)=\frac{5}{6}\cdot(t-18)\cdot(t-6)=0 \Rightarrow t=6$

Si 0<t<12 $f''(t)=\frac{5}{3}t-20 \Rightarrow f''(6)=-10<0$; en ***t=6*** hay un máximo local y vale $f(6)=330$

II) ***Si 12<t<24*** $f'(t)=2t-40=0 \Rightarrow t=20$

Si 12<t<24 $f''(t)=2 \Rightarrow f''(20)=2>0$ ***; en t=20 hay un mínimo local y vale*** $f(20)=146$

Tenemos los valores: f(0)=90, f(6)=330, f(12)=210, f(20)=146 y f(24)=162.

El valor más alto de glucosa se corresponde a las 6 h y vale 330 mg/dl.

El valor más bajo de glucosa se corresponde a las 0 h y vale 90 mg/dl.

c) $t^2-40t+546=155 \Rightarrow t^2-40t+391=0 \Rightarrow t_1=17 \vee t_2=23$

A las 17 h y a las 23 h.