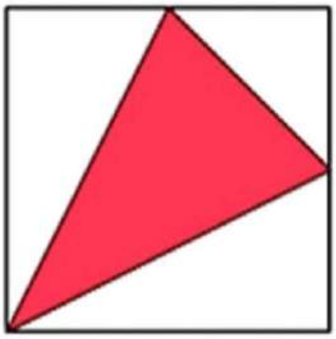
Solución a “Perímetro y área del triángulo inscrito”

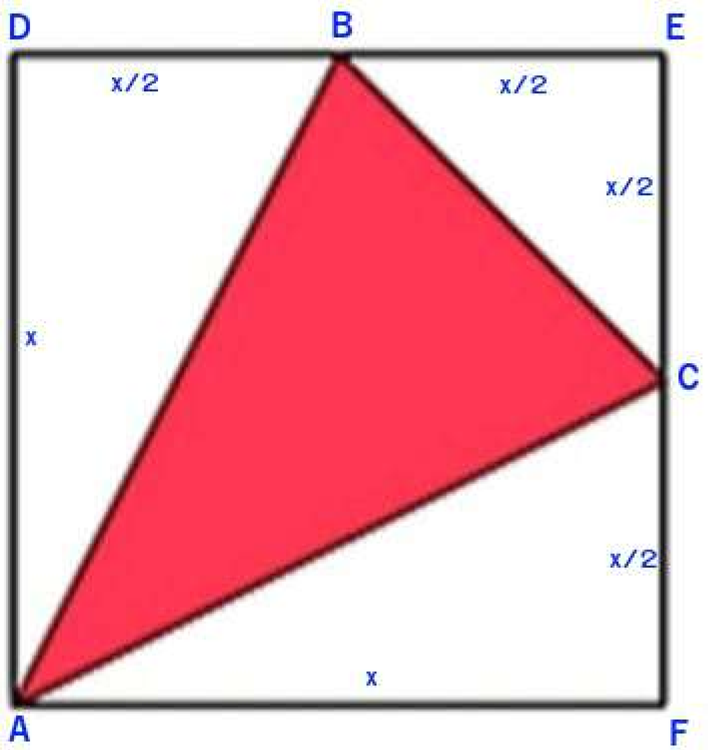
Enunciado:



Obtener el perímetro y el área del triángulo inscrito en el cuadrado de lado "x", sabiendo que dos vértices coinciden con el punto medio del lado del cuadrado.

Solución:

Consideremos la figura con los siguientes elementos:



En el triángulo ΔACF: $AC^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}$

https://profematesjac.wordpress.com/

José Antonio Cobalea

En el triángulo **ΔBCE**: $BC^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}$

En el triángulo **ΔABD**: $AB^2=x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{5x^2}{4}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}$

El triángulo **ΔABC** es un triángulo isósceles pues $AB=AC$ y acutángulo pues:

$$AB^2<AC^2+BC^2\Leftrightarrow\frac{5x^2}{4}<\frac{5x^2}{4}+\frac{2x^2}{4}=\frac{7x^2}{4}$$

Su perímetro sería:

$$P_{ABC}=AB+BC+AC=\frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}+\frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x}{2}\ \text{(unidades lineales)}$$

Su área vamos a calcularla por la fórmula de Herón: $A_{ABC}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$, donde ***s*** es el semiperímetro.

Calculemos cada factor dentro de la raíz cuadrada:

$$s=\frac{P_{ABC}}{2}=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}$$

$$s-a=s-BC=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}-\frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}$$

$$s-b=s-AC=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}-\frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4}$$

$$s-c=s-AB=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}-\frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4}$$

Ahora calculamos su producto dentro del radical:

$$s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)=\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}\cdot\frac{\left(2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot x}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4}=\frac{(20-2)x^2}{16}\cdot\frac{2x^2}{16}=\frac{9x^4}{64}$$

Con lo que finalmente su área será: $A_{ABC}=\frac{3x^2}{8}$ (unidades cuadradas)

Es decir el área del triángulo ΔABC es ⅜ del área del cuadrado.