Solución a "Autovalores y autovector"

Enunciado:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se consideran las siguientes matrices de orden 3:

- $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- *I = matriz identidad.*

Se pide:

a) *Calcular el polinomio característico:* $P(\lambda)=det(A-\lambda\cdot I)$ *y hallar todas las raíces reales del mismo (autovalores).*

b) *Para* $\lambda=5$*, calcular un vector no nulo* $\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *que satisfaga que* $(A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{v}=\vec{0}$ *(autovector).*

Solución:

a) Calculemos primero la matriz $A-\lambda\cdot I$:

$$A-\lambda\cdot I=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$; por lo que su determinante será:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot[(4-\lambda)\cdot(3-\lambda)-2]=(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-7\lambda+10)$$

Así pues: $\boldsymbol{P(\lambda)=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20}$ **(polinomio característico)**

https://profematesjac.wordpress.com/

José Antonio Cobalea

Procedamos a calcular las raíces reales del mismo:

$$-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20=(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-7\lambda+10)=(2-\lambda)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-5)=-(\lambda-2)^2\cdot(\lambda-5)$$

*Las raíces reales del mismo (autovalores) son **2 y 5**.*

b) Ahora $\lambda=5$; luego:

$$A-\lambda\cdot I=\begin{pmatrix}4-5 & 1 & 0\\ 2 & 3-5 & 0\\ 3 & 2 & 2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$$ y, por tanto:

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$; con lo que obtenemos el sistema homogéneo:

$$\begin{cases}-x+y=0\\ 2x-2y=0\\ 3x+2y-3z=0\end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado (hay infinitas soluciones):

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$; $F_2+2\cdot F_1\to F_2$; $F_3+3\cdot F_1\to F_3$; obtenemos:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$$; obteniéndose como conjunto de soluciones:

$\mathbf{5y=3z}$; $\mathbf{x=y}$; llamando $\boldsymbol{\mu=z}$ obtenemos todas las soluciones de dicho sistema:

$$S=\left\{\left(\frac{3\mu}{5},\frac{3\mu}{5},\mu\right);\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

Una solución <u>*no nula*</u> es ***(3, 3, 5)*** ($\boldsymbol{\mu}=5$, por ejemplo); con lo que el autovector

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$$ *(hay infinitos autovectores)*