Solución a "Los dos pintores"

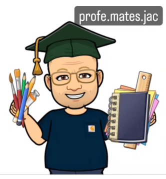
Enunciado:

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de dos pintores. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=cos\left(\frac{\pi \cdot x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores diferentes. Además, se sabe que con un bote de pintura de 3000 ml se pueden pintar 6´25 m² de superficie.

a) *Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en dicho intervalo contenida completamente en el muro?*

b) *Averigue el área que tienen que pintar de cada color.*

c) *¿Cuántos botes de pintura de 3000 ml se tienen que comprar como mínimo para pintar solamente toda la superficie bajo la curva $f(x)$? ¿Y para pintar solo todo el muro por encima de dicha curva?*



Solución:

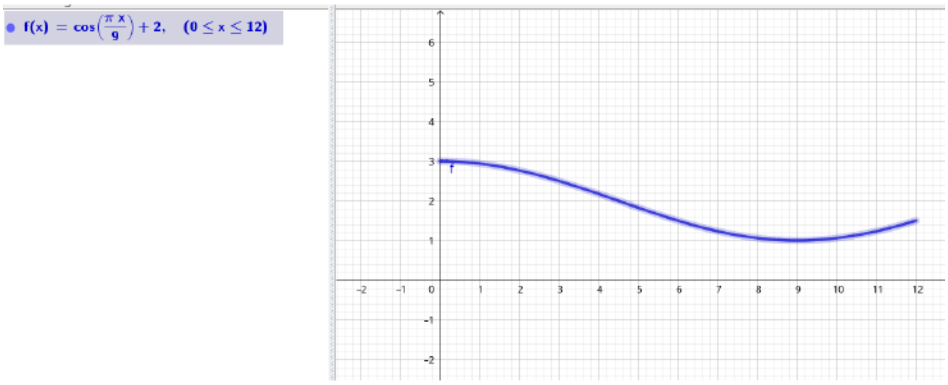
a) Se trata de una función continua y derivable.

$f(0)=3$; $f(12)=1'5$; además: $f'(x)=\frac{-\pi}{9}\cdot sen\left(\frac{\pi \cdot x}{9}\right)$ que será cero en el intervalo **(0, 12)** solo en el punto ***x = 9*** ; además: $f''(x)=\frac{-\pi^2}{81}\cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{9}\right)$, por lo que: $f''(9)=\frac{\pi^2}{81}>0$ (***presenta un mínimo local en x = 9 (f(9) = 1)***).

Así pues:

En dicho intervalo ([0, 12])el valor máximo de la función es 3 (para x = 0) y el valor mínimo es 1 (para x = 9).

Como el muro es un rectángulo de altura 3 y base 12 (con extremo inferior izquierdo en el punto (0, 0)) resulta que la curva está contenida completamente en dicho muro.



b) Vamos a calcular primero el área bajo la curva:

$$A_{bajo}=\int_0^{12}\left(\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{9}\right)+2\right)dx=\left(\frac{9}{\pi}\cdot sen\left(\frac{\pi\cdot x}{9}\right)+2x\right)\Big|_0^{12}=\frac{9}{\pi}\cdot sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)+24\approx \mathbf{21'519\ m^2}$$

Como el área total del muro es: $A_{muro}=3\cdot 12=36\ m^2$, el área por encima de la curva es de:

$$A_{superior}=A_{muro}-A_{bajo}\approx 36-21'519\approx \mathbf{14'481\ m^2}$$

El área superior es de 14’481 m^2 y el área inferior de 21’519 m^2 (aprox.) (áreas de dos colores diferentes).

c) Para pintar sólo toda la superficie bajo la curva ($21'519\ m^2$) ***se necesitarían***:

$\frac{21´519}{6´25}\approx 3'443\rightarrow$ ***4 botes de 3000 ml.***

Ahora ***para pintar sólo toda la superficie por encima de la curva*** ($14'481\ m^2$) ***se necesitarían***:

$\frac{14´481}{6´25}\approx 2'317\rightarrow$ ***3 botes de 3000 ml.***