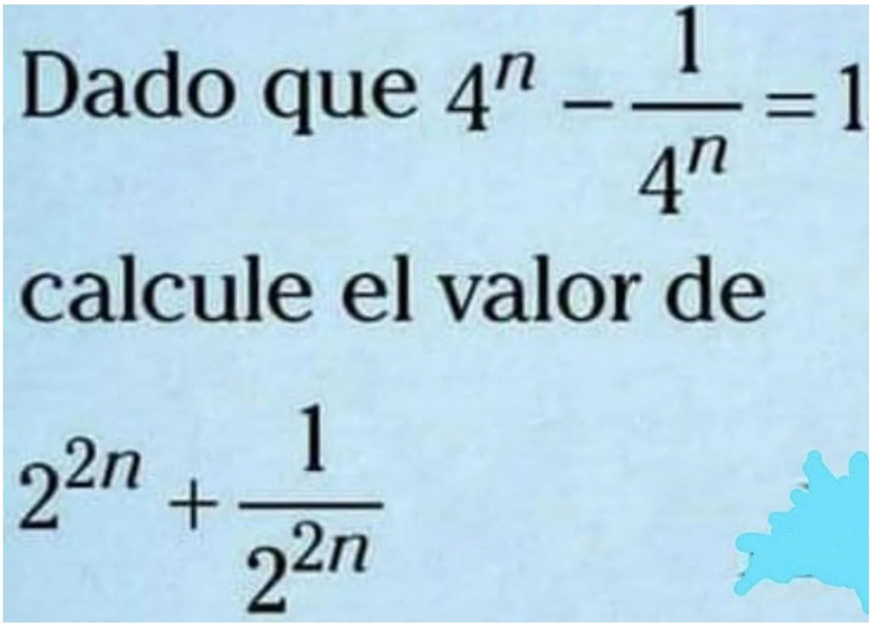
Solución a "Calcula esta suma de potencias"

Enunciado:



Dado que $4^n - \dfrac{1}{4^n} = 1$

calcule el valor de

$2^{2n} + \dfrac{1}{2^{2n}}$

Solución:

Sabemos que $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$, luego lo que tenemos que calcular en realidad es:

$2^{2n} + \dfrac{1}{2^{2n}} = 4^n + \dfrac{1}{4^n}$; por otro lado: $4^n = 1 + \dfrac{1}{4^n} \Rightarrow 4^n \cdot 4^n = 4^n + 1 \Leftrightarrow (4^n)^2 - 4^n - 1 = 0$. Haciendo un cambio de variable para resolverla ($z = 4^n$) tenemos que $z^2 - z - 1 = 0$ cuya solución real positiva (ya que z >0) es $z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (el número áureo).

José Antonio Cobalea

Así pues: $z = 4^n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; calculemos ya de paso ***n*** : $4^n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{n = \log_4\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

Lo que queremos calcular es:

$$2^{2n} + \frac{1}{2^{2n}} = 4^n + \frac{1}{4^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^2 + 4}{2+2\sqrt{5}} = \frac{10+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(5+\sqrt{5})}{2\cdot(1+\sqrt{5})} = \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Solución: *la raíz cuadrada de 5*