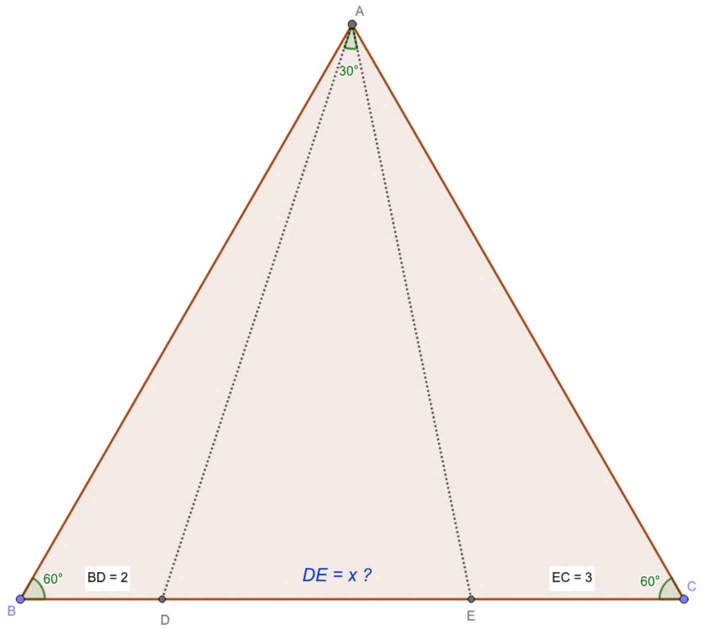
Solución a “Calcula la longitud DE=x”

Enunciado:



Solución:

El triángulo **Δ*ABC*** es un triángulo equilátero; llamemos ***L*** a su lado. La altura, ***h***, correspondiente al lado ***BC*** es $h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L$. Consideremos el punto B en el origen de coordenadas, es decir, ***B(0,0)***. De esta forma los puntos siguientes tienen estas coordenadas:

$$D(2{,}0)\ ;\ E(L-3{,}0)\ ;\ C(L{,}0)\ ;\ A\left(\frac{L}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L\right)$$

Vamos a calcular las pendientes de las rectas que pasan por los puntos ***A*** y ***D*** y por los puntos ***A*** y ***E***, respectivamente.

Para ello considero los vectores directores respectivos: $\vec{AD}=\left(2-\frac{L}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L\right)$ y $\vec{AE}=\left(\frac{L}{2}-3,-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L\right)$; por tanto, las pendientes mencionadas serían:

$$\boldsymbol{m_{AD}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot L}{2-\frac{L}{2}}=\frac{-\sqrt{3}\cdot L}{4-L}=\frac{\sqrt{3}\cdot L}{L-4}}\text{ y }\boldsymbol{m_{AE}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot L}{\frac{L}{2}-3}=\frac{\sqrt{3}\cdot L}{6-L}}$$

Como el ángulo que forman ambas rectas es de 30°, $\tan 30^o=\left|\frac{m_{AE}-m_{AD}}{1+m_{AE}\cdot m_{AD}}\right|$; calculemos el numerador y el denominador de dicha expresión:

$$m_{AE}-m_{AD}=\frac{\sqrt{3}\cdot L}{6-L}-\frac{\sqrt{3}\cdot L}{L-4}=\frac{\sqrt{3}\cdot L^2-4\sqrt{3}\cdot L-6\sqrt{3}\cdot L+\sqrt{3}\cdot L^2}{(6-L)\cdot(L-4)}=\frac{2\sqrt{3}\cdot L^2-10\sqrt{3}\cdot L}{-L^2+10L-24}$$

$$1+m_{AE}\cdot m_{AD}=1+\frac{\sqrt{3}\cdot L}{6-L}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot L}{L-4}=1+\frac{3L^2}{-L^2+10L-24}=\frac{2L^2+10L-24}{-L^2+10L-24}$$

Al dividir ambas obtenemos (dentro del valor absoluto): $\frac{2\sqrt{3}\cdot L^2-10\sqrt{3}\cdot L}{2L^2+10L-24}=\frac{\sqrt{3}\cdot L^2-5\sqrt{3}\cdot L}{L^2+5L-12}$

Por lo que:

$\tan 30^o=\frac{1}{\sqrt{3}}=\left|\frac{\sqrt{3}\cdot L^2-5\sqrt{3}\cdot L}{L^2+5L-12}\right|$; dándose dos casos:

Caso 1:

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot L^2-5\sqrt{3}\cdot L}{L^2+5L-12}\Rightarrow 1=\frac{3L^2-15L}{L^2+5L-12}\Rightarrow 3L^2-15L=L^2+5L-12\Leftrightarrow L^2-10L+6=0$ cuyas soluciones son: $L_1=5+\sqrt{19}$ y $L_2=5-\sqrt{19}$ (*descartamos* L_2 *pues* $L>5$).

Caso 2:

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}\cdot L-\sqrt{3}\cdot L^2}{L^2+5L-12}\Rightarrow 1=\frac{15L-3L^2}{L^2+5L-12}\Rightarrow 15L-3L^2=L^2+5L-12\Leftrightarrow 2L^2-5L-6=0$ cuyas soluciones son: $L_3=\frac{5+\sqrt{73}}{4}$ y $L_4=\frac{5-\sqrt{73}}{4}$ (*descartamos ambas pues* $L_3<5$ *y* $L_4<0$).

Concluimos que el lado ***L*** es: $L=5+\sqrt{19}$ y por tanto:

$$\boldsymbol{x}=DE=L-(BD+EC)=5+\sqrt{19}-5=\boldsymbol{\sqrt{19}}\text{ (solución)}$$