Solución a "Evolución mensual del número de socios"

Enunciado:

Se estudia la evolución mensual del número de socios de una entidad durante 2005 y se observa que está modelada por la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x+a, & si\ 0\le x<6 \\ 50, & si\ 6\le x\le 8 \\ 50+(x-8)(x-12), & si\ 8<x\le 12 \end{cases}\quad ,donde\ x\ es\ el\ tiempo\ en\ meses.$$

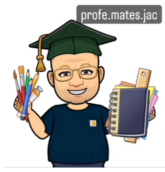
*a) La entidad se fundó con **50** socios. Determínese **a**.*

b) ¿Se trata de una función continua?

c) Determínese en qué mes el número de socios fue máximo y en qué mes fue mínimo.

*d) Si, para cubrir gastos, la entidad necesita más de **47** socios, ¿en qué meses tuvo pérdidas?*

Solución:



a) Al fundarse con 50 socios se tiene que $f(0)=50\Leftrightarrow 50=f(0)=a\Rightarrow a=50$

Solución: ***a = 50***

b) Cada rama es continua; hemos de ver la continuidad en las abscisas de ruptura (*donde cambia la fórmula de la función*). Es decir, en las abscisas 6 y 8.

<u>*En 6*</u>:

$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}(-x^2+6x+50)=50$ y $\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}(50)=50$; además: $f(6)=50$

Por lo que es continua en el punto 6.

En 8:

$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^-} (50) = 50$ y $\lim_{x \to 8^+} f(x) = \lim_{x \to 8^+} (50 + (x-8)(x-12)) = 50$; además: $f(8) = 50$

Por lo que es continua en el punto 8.

Resumiendo: ***la función f es una función continua en su dominio***

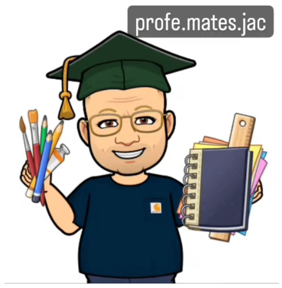
c) La función ***f*** sería:

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + 50 & si\ 0 \le x < 6 \\ 50 & si\ 6 \le x \le 8 \\ x^2 - 20x + 146 & si\ 8 < x \le 12 \end{cases}$; hemos visto que es continua pero ¿es derivable?. En cada una de las tres ramas lo es (*por tratarse de funciones polinómicas*).

En el intervalo (0, 6): $f'(x) = -2x + 6$

En el intervalo (6, 8): $f'(x) = 0$

En el intervalo (8, 12): $f'(x) = 2x - 20$



En 6:

$f'(6^-) = -2 \cdot 6 + 6 = -6$ y $f'(6^+) = 0$; por lo que no es derivable en x=6.

En 8:

$f'(8^-) = 0$ y $f'(8^+) = 2 \cdot 8 - 20 = -4$; por lo que no es derivable en x=8.

No es una función derivable. Para ver sus máximos y mínimos veremos que pasa en los puntos singulares (derivada = 0) junto a sus extremos (0 y 12) y puntos donde no es derivable (6 y 8). Veámoslo:

En el intervalo (0, 6): $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$; además $f''(3) = -2 < 0$, por lo que hay un máximo local en $(3, f(3)) = (3, 59)$.

En el intervalo (6, 8) la función es constante e igual a 50.

En el intervalo (8, 12): $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$; además $f''(10)=2>0$, por lo que hay un mínimo local en $(10,\ f(10))=(10,\ 46)$.

En los puntos: $f(0)=50,\ f(6)=50,\ f(8)=50\ \ y\ \ f(12)=50$.

De lo que se deduce que hay un mínimo absoluto en el punto $(10,\ 46)$ y un máximo absoluto en el punto $(3,\ 59)$.

Solución: ***el número de socios fue máximo en el mes de marzo (59 socios) y mínimo en el mes de octubre (46 socios).***

d) Tenemos que determinar los valores enteros de *x* tales que $f(x)\leq 47$.

En el intervalo [0, 6): $-x^2+6x+50\leq 47 \Leftrightarrow x^2-6x-3\geq 0$. Tenemos que $x^2-6x-3=(x-(3-2\sqrt{3}))\cdot(x-(3+2\sqrt{3}))\geq 0$, la cual no tiene solución en dicho intervalo.

En el intervalo [6, 8] , la función es constante e igual a 50; no hay solución en dicho intervalo.

En el intervalo (8, 12]: $x^2-20x+146\leq 47 \Leftrightarrow x^2-20x+99\leq 0$. Tenemos que $x^2-20x+99=(x-9)\cdot(x-11)\leq 0$, la cual es cierta para *x* = 9, 10 y 11 (*valores enteros*).

Solución: ***tuvo pérdidas en los meses de septiembre, octubre y noviembre.***