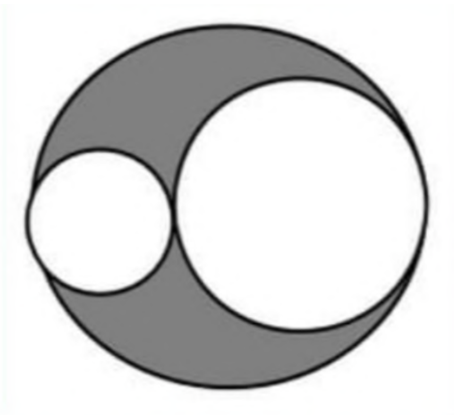
Solución a “Longitud de los dos diámetros”

Enunciado:



En una circunferencia de longitud 20π cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella (ver figura). ¿Qué longitud debe tener cada uno de los dos diámetros para que sea máxima el área gris delimitada por las tres circunferencias?. Calcula también dicha área máxima.

Solución:

Al tener la circunferencia “envolvente” una longitud de 20π cm, tiene un radio de 10 cm y por tanto su diámetro es de 20 cm.

Llamemos a los diámetros de las circunferencias blancas interiores: ***x*** y ***20-x*** , respectivamente. Sus radios respectivos serán: $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$ y $\boldsymbol{10-\frac{x}{2}}$.

Entonces el área sombreada es:

$$A_{somb}=A(x)=\pi\cdot 10^2-\left(\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\cdot\left(10-\frac{x}{2}\right)^2\right)=100\pi-\frac{\pi x^2}{4}-\frac{\pi\cdot(400+x^2-40x)}{4}=\pi\cdot\left(10x-\frac{x^2}{2}\right)$$

, donde *0<x<20.*

Para que el área sombreada sea máxima, al tratarse de una función continua y derivable, es necesario que $0=A'(x)$; pero $A'(x)=\pi\cdot(10-x)$; por tanto ***x*** ha de ser 10.

Veamos la derivada segunda $A''(x)=-\pi$; luego $A''(10)=-\pi<0$

Por lo que: el área sombreada es máxima para x = 10 cm.

Entonces los diámetros respectivos valdrán: $x=10 \;\; y \;\; 20-x=10 \;\; cm$ (*se trataría de dos circunferencias de igual diámetro*)

Y el área máxima sombreada sería: $A(10)=\pi\cdot\left(10\cdot 10-\frac{10^2}{2}\right)=50\pi \;\; cm^2$

Solución: ***los dos diámetros han de ser de 10 cm cada uno y el área sombreada resultante máxima es de 50π cm²*** .