Solución a "Mayor o igual que 5625 diezmilésimas"

Enunciado:

Let $a, b \in \mathbb{R}$ satisfy $a + b = 1$.
Prove that

$$(a^2 + b)(a + b^2) \geqslant \frac{9}{16}$$

Solución:

$a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$ y entonces:

$$(a^2+b)\cdot(a+b^2)=(a^2+1-a)\cdot(a+(1-a)^2)=(a^2-a+1)\cdot(a^2-a+1)=(a^2-a+1)^2$$

O sea que se nos queda en función sólo de ***a*** :

Sea $f(a)=(a^2-a+1)^2=a^4-2a^3+3a^2-2a+1$; es una función continua y derivable.

$f'(a)=4a^3-6a^2+6a-2=2\cdot(a^2-a+1)\cdot(2a-1)$; se anula solo para el valor real $a=\frac{1}{2}$.

- si $x<\frac{1}{2}$ entonces $f'(x)<0$ y la función ***f*** es estrictamente decreciente para $x<\frac{1}{2}$.

- si $x>\frac{1}{2}$ entonces $f'(x)>0$ y la función ***f*** es estrictamente creciente para $x>\frac{1}{2}$.

Por lo que tiene un mínimo local para $a=\frac{1}{2}$. El valor del mismo es

$$f(1/2)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)^2=\frac{9}{16}=0'5625$$

Así pues:

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\ f(a)=(a^2-a+1)^2=(a^2+b)\cdot(a+b^2)\geq\frac{9}{16}=0'5625$$

(*5625 diezmilésimas*, siendo *b* = 1-*a*)   *c.q.d*