Solución a "Sistema homogéneo con parámetro"

Enunciado:

Dado el sistema homogéneo: $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$

a) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de la trivial.

b) Resolverlo para el caso $k = 3$.

Solución:

a) Para que el sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial (0, 0, 0) el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser cero.

$$0=\begin{vmatrix}1 & k & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -4 & k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & k & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 1+k & -4 & k\end{vmatrix}=-4\cdot\begin{vmatrix}k & -1\\ -4 & k\end{vmatrix}+(1+k)\cdot\begin{vmatrix}k & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot(k^2-4)+(1+k)\cdot(2k-1)=-2k^2+k+15$$

cuyas soluciones son $k_1=3$ y $k_2=-2{,}5$

b) Para $k=3$, nos queda el sistema:

$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x-4y+3z=0 \end{cases}$; en forma matricial queda: $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ 1 & -4 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $-2F_1+F_2 \to F_2$ y $F_3-F_1 \to F_3$, con lo que nos queda:

$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 4 & 0\\ 0 & -7 & 4 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 4 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango es 2. Pasando la *z* a la derecha nos queda:

$\begin{cases} x+3y=z \\ 7y=4z \end{cases}$; con lo que $y=\frac{4}{7}z$ y $x=\frac{-5}{7}z$

Llamando $z=\lambda$, nos quedan las infinitas soluciones del sistema así:

$$\left\{\left(\frac{-5}{7}\lambda,\ \frac{4}{7}\lambda,\ \lambda\right)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$ ó también $$\left\{\left(-5\lambda,\ 4\lambda,\ 7\lambda\right)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$