RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO

(Profesor Antonius Benedictus)

1. Nomenclatura

ΔABC es un **triángulo**. A, B, C son los **vértices**.

a, b, c son los respectivos **lados opuestos**.

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ son los respectivos **ángulos interiores**.

h_a, h_b, h_c son las **alturas** relativas a los lados indicados.

m_a, m_b, m_c son las **medianas**. v_a, v_b, v_c son las **bisectrices**.

r es el **radio de la circunferencia inscrita** en el triángulo.

R es el **radio de la circunferencia circunscrita** al triángulo.

p es el **semiperímetro**. $\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$ S es la **superficie**.

2. Fórmulas de resolución de un triángulo rectángulo.

Sea $\hat{A} = \frac{\pi}{2} \rightarrow a$ es la **hipotenusa**, y b, c son los **catetos**.

H es el pie de la altura h trazada sobre la hipotenusa.

$$\boxed{\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{\sin \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{b}{a}} \quad \boxed{\sin \hat{C} = \cos \hat{B} = \frac{c}{a}}$$

__TEOREMA DE LA ALTURA__ $\boxed{h^2 = \overline{HC} \cdot \overline{HB}}$

__TEOREMA DEL CATETO__ $\boxed{b^2 = a \cdot \overline{HC}}$ $\boxed{c^2 = a \cdot \overline{HB}}$

__TEOREMA DE PITÁGORAS__ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

__SUPERFICIE__

$$\boxed{S = \frac{bc}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}}$$

3. Fórmulas de resolución de un triángulo oblicuoángulo.

Nota: Las fórmulas marcadas con (*) admiten otras dos versiones.

SUMA DE LOS ÁNGULOS $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi}$

DESIGUALDAD TRIANGULAR (*) $\boxed{a < b + c}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ (*) Si V_a es el pie de la bisectriz v_a:

$$\boxed{\frac{\overline{V_a B}}{\overline{V_a C}} = \frac{c}{b}}$$

TEOREMA DEL COSENO (*) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - \left(2bc\cos\hat{A}\right)}$

TEOREMA DEL SENO

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R}$$

TEOREMA DE LA TANGENTE (*)

$$\boxed{a \neq b \to \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{\tan\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}}$$

FÓRMULAS DE BRIGGS (*)

$$\boxed{\sin\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}} \quad \boxed{\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO (*)

$$\boxed{S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{ab\sin\hat{C}}{2} = \frac{a^2\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}{2\sin\left(\hat{B}+\hat{C}\right)}}$$

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin\hat{A}\cdot\ \sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C} = rp}$$

FÓRMULA DE HERÓN $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

MEDIANA (*) $\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$

BISECTRIZ (*)

$$\boxed{v_a = \sqrt{bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}}$$