Solución a "Discute y resuelve"

Enunciado:

Sea el sistema: $\begin{cases} mx + mz = 2 \\ x + my - z = 1 \\ x + 3y + z = 2m \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

a) Escribámoslo en forma matricial:

$(A:B)=\begin{pmatrix} m & 0 & m & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2m \end{pmatrix}$; el rango de **A** es como mínimo 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$.

Dicho rango será 3 sólo en el caso en que $0\neq det(A)=\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6m$; o sea es 3 sólo cuando $m\neq 0$.

En ese caso el ***rango(A)=rango(A:B)=3=nº de incógnitas*** y el sistema será compatible determinado.

Si $m=0$ nos queda que la primera línea de la matriz ampliada anterior nos dice que 0=2 y eso no es posible (por tanto el sistema es incompatible).

Resumiendo:

Si m no es cero el sistema es compatible determinado y si m es cero el sistema es incompatible.

b) Lo resolvemos en el caso $m\neq 0$ por el método de Cramer:

$$det(A)=\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6m$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & m & -1 \\ 2m & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6m}=\frac{-2m^3+5m+6}{6m}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2m & 1 \end{vmatrix}}{6m}=\frac{2m^2-2}{3m}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 2m \end{vmatrix}}{6m}=\frac{2m^3-5m+6}{6m}$$

Por ejemplo, si $m=1$, la solución sería: $x=\frac{3}{2}; y=0; z=\frac{1}{2}$.