Solución a "Ecuación matricial"

Enunciado:

El sistema $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) Poner $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$ y determinar, si existen, el valor o valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) Poner $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$ y determinar, si existen, el valor o valores de c para los cuales el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Solución:

a) Para que sea compatible y determinado el rango de la matriz A ha de ser tres; o sea que su determinante ha de ser distinto de cero. Pero esto no ocurre pues sea cual sea el valor de ***a*** su determinante tiene dos columnas iguales y por tanto siempre valdrá cero.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} \; ; \forall a \in \Re$$

No existe valor alguno de a que haga el sistema compatible determinado.

b) El sistema quedaría en la forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{pmatrix}$; será incompatible si el rango de la matriz de coeficientes no coincide con el rango de la matriz ampliada, es decir: $rang(A) \neq rang(A:B)$).

Pero $rang(A) = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Así pues el $rang(A:B) = 3$ para que sea incompatible.

Los siguientes menores han de ser distintos de cero:

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & b \end{vmatrix} = 2b+5 \Leftrightarrow b \neq \frac{-5}{2}$$

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & b \end{vmatrix} = 0$$ (*no se obtiene valor alguno de* ***b***)

$$0 \neq \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & b \end{vmatrix} = -5-2b \Leftrightarrow b \neq \frac{-5}{2}$$

Si b es distinto de -5/2 el sistema es incompatible.

c) El sistema quedaría en la forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$; lo resolvemos por el método de Gauss:

$-4F_1+F_3 \to F_3$ y obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; ahora $\frac{1}{2}F_2 \to F_2$; $-5F_2+F_3 \to F_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 10-\frac{5c}{2} \end{pmatrix}$; para que sea compatible indeterminado ha de ocurrir que

$10-\frac{5c}{2}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c=4}$ y, en ese caso nos queda el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ cuya solución es $y=2$; $x=-z$.

Las infinitas soluciones vendrían por las ternas: $\boldsymbol{\{(-\lambda,\ 2,\ \lambda)\ ;\ \lambda \in \Re\}}$ (*c* = 4)